



В. Ф. Лазуткин

ВЫПУКЛЫЙ БИЛЛИАРД
И
СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ
ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

**ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА**

В. Ф. ЛАЗУТКИН

**ВЫПУКЛЫЙ БИЛЛИАРД
И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ
ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА**



**ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЛЕНИНГРАД 1981**

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

УДК 517.936

Л а з у т к и н В.Ф. Выпуклый бильярд и собственные функции оператора Лапласа. - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 196 с. Ил. - 17, табл. - 2, библиогр. - 51 назв.

Монография посвящена исследованию асимптотики собственных чисел и собственных функций задачи Дирихле для оператора Лапласа в выпуклой области на плоскости. К этой задаче сводится изучение малых колебаний выпуклой мембраны с закрепленным краем и ряд других задач математической физики. Асимптотические выражения для собственных чисел и собственных функций (называемые "квазимодами") строятся на основе изучения инвариантных множеств специальной динамической системы - "выпуклого бильярда", порожденного областью Ω . В книге содержится систематическое изложение теории выпуклого бильярда. Построены квазимоды, аппроксимирующие часть спектра оператора Лапласа, которая имеет положительную плотность в множестве всех собственных чисел оператора Лапласа.

Книга предназначена для математиков, специалистов по спектральной теории, теории динамических систем, асимптотическим методам в теории дифракции, математической физике и т.д., для аспирантов и студентов, специализирующихся по соответствующим дисциплинам.

Рецензенты: проф. В.М.Бабич (Мат. ин-т им.Стеклова),
проф. В.С.Булдырев (Ленингр. ун-т)

Л 20203.20402-044 71-81. 1702050000
076(02)-81

© Издательство
Ленинградского
университета,
1981 г.

ИБ № 1167

Владимир Федорович Лазуткин

ВЫПУКЛЫЙ БИЛЛИАРД
И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Редактор Г.И.Чередниченко Технический редактор Г.М.Иванова
Корректоры Г.Н.Евенко, М.В.Зазулина

Подписано к печати 23.01.81.

Формат 60x84 1/16. Бумага тип. №2.

Уч.-изд.л. 9, 26. Усл. печ. л. 11,43.

Заказ 47. Тираж 1394 экз.

Издательство ЛГУ имени А.А.Жданова

199164. Ленинград, В-164, Университетская наб., 7/9.

М - 18459

Печать офсетная.

Печ. л. 12,25.

Цена 1р.40к.

фотоофсетная лаборатория ЛГУ
наб. Макарова, 6.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Выпуклый бильярд	12
§ 1. Поток S_t и преобразование T	"
§ 2. Исследование преобразования T во внутренних точках Σ	18
§ 3. Исследование преобразования T в окрестности края поверхности Σ	22
§ 4. Периодические точки	28
§ 5. Семейства инвариантных кривых	42
§ 6. Некоторые формулы, связанные с семейством инвариантных кривых. Мера множества, заполненного инвариантными торами	55
Глава 2. Квазимоды и спектр	66
§ 7. Оператор Лапласа	"
§ 8. Квазимоды и асимптотика собственных чисел	68
§ 9. Условие квантования для семейства инвариантных торов. Определение множества Λ	74
§ 10. Оценка суммарной кратности спектра, аппроксимируемого квазимодами	83
Глава 3. Квазимоды	85
§ 11. Определение индекса	"
§ 12. Формулы для квазимод	93
§ 13. Преобразование выражения для u_{pq} . Применение метода стационарной фазы	96
§ 14. Оценка снизу нормы u_{pq}	103
§ 15. Оценки $u_{pq}(x)$ на границе. Определение функций $v_s^{(j)}$ и α_s	105

§ 16. План доказательства теоремы 14. Случай неблизких собственных чисел.....	116
§ 17. Локальная лемма об ортогональности. Оцен- ки в области \mathcal{D}_2	118
§ 18. Оценки в области \mathcal{D}_2	126
Глава 4. Доказательство теоремы о семействе инвариант- ных кривых	131
§ 19. Срезающий множитель	132
§ 20. Сглаживающий оператор	134
§ 21. Разностное уравнение	141
§ 22. Описание итерационного процесса	142
§ 23. Оценки для u_k и v_k . Выбор чисел a_{k+1} , b_{k+1}	145
§ 24. Доказательство сходимости итерационного процесса и оценки функций $U(\xi, \eta)$ и $V(\xi, \eta)$..	148
§ 25. Доказательство оценок (22.14). Выбор по- следовательности $\{\mu_k\}$	152
§ 26. Доказательство оценок (22.15). Выбор по- следовательности $\{r_k\}$	156
Глава 5. Доказательство теоремы Купки - Смейла для вы- пуклого бильярда	163
§ 27. План доказательства теоремы	"
§ 28. Доказательство леммы 27.3. Приведение n -траекторий в общее положение	169
§ 29. Доказательство леммы 27.4. Приведение периодической траектории в общее по- ложение	182
§ 30. Доказательство леммы 27.5. Трансверсаль- ность гомоклинических и гетерокли- нических точек	190
Указатель литературы	193

В В Е Д Е Н И Е

Целью исследований, результаты которых изложены в этой книге, является получение информации об асимптотическом поведении при $\lambda \rightarrow +\infty$ собственных чисел и собственных функций задачи

$$\begin{aligned} (\Delta + \lambda) u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \quad (0.1)$$

Здесь Ω — выпуклая ограниченная область на плоскости с гладкой границей $\partial\Omega$, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, λ — спектральный параметр. К задаче (0.1) сводится изучение малых колебаний выпуклой мембраны с закрепленным краем и ряд других задач математической физики.

Метод исследования состоит в построении квазимод, т.е. приближенных решений $\{u_k, \lambda_k\}$ задачи (0.1). Последовательность пар $\{u_k, \lambda_k\}$, где u_k — гладкие функции в Ω , удовлетворяющие краевому условию $u|_{\partial\Omega} = 0$, λ_k — положительные числа, $\lambda_k \rightarrow +\infty$, называется последовательностью квазимод для задачи (0.1), если: 1) $\|u_k\| \geq c^{-1}$; 2) $\|\Delta u_k + \lambda_k u_k\| \leq c \lambda_k^{-\nu/2}$; 3) $|(u_k, u_l)| \leq c(\min\{\lambda_k, \lambda_l\})^{-1}$. Здесь c и ν — положительные постоянные, $\|\cdot\|$, (\cdot, \cdot) — соответственно норма и скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Число ν называется порядком последовательности квазимод. Оно указывает на скорость аппроксимации спектра квазимодами. Чем больше ν , тем лучше аппроксимация.

Пусть мы исходя из геометрии области Ω каким-то способом научились строить квазимоды. Что можно сказать, имея квазимоды $\{u_k, \lambda_k\}$, об истинных собственных функциях и собственных числах задачи (0.1)?

Оказывается, в этом случае существует подпоследовательность $\{\tilde{\lambda}_{n_k}\}$ собственных чисел задачи (0.1), такая, что

$$|\tilde{\lambda}_{n_k} - \lambda_k| \leq c^2 \lambda_k^{-\nu/2}. \quad (0.2)$$

С собственными функциями ситуация несколько сложнее. Можно утверждать лишь наличие группы близких к λ_k собственных чисел $\{\tilde{\lambda}_{n_{k,i}}\}_{1 \leq i \leq m_k}$, $|\tilde{\lambda}_{n_{k,i}} - \lambda_k| \leq c_1 \lambda_k^{-\nu_1/2}$, собственные функции которых $\{\tilde{u}_{n_{k,i}}\}$ в совокупности аппроксимируют квазимоду u_k :

$$\left\| u_k - \sum_{i=1}^{m_k} c_{ki} \tilde{u}_{n_{k,i}} \right\| \leq \text{const} \cdot \lambda_k^{-(\nu-\nu_1)/2} \quad (0.3)$$

Спектр оператора Лапласа $-\Delta$ состоит из бесконечной последовательности $\{\tilde{\lambda}_n\}$ собственных чисел, которые располагаются на положительной части вещественной оси довольно нерегулярно и могут образовать группы близких собственных чисел указанного выше вида. В общем случае, как показал В.И. Арнольд [6], дело обстоит именно таким образом. Мы можем делать очень детальные заключения о собственных числах, но истинные собственные функции, по-видимому, аппроксимируются линейными комбинациями естественно возникающих квазимод.

Есть мнение о том, что при разумной постановке задачи аппроксимация спектра квазиמודами является правильным ответом на вопрос: как выглядят собственные функции и собственные числа при больших λ . С физической точки зрения набор очень близких собственных частот не отличается от одной собственной частоты большой кратности, если время наблюдения $T \ll 1/\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ - максимальная разность частот в наборе. Если порядок последовательности квазимод ν достаточно большой ($\nu > 1$), то $\Delta\omega \rightarrow 0$ при $\lambda_k \rightarrow \infty$, и с указанной точки зрения наши квазимоды дают разумную информацию о собственных функциях. Проблема состоит в построении достаточно "полного" набора квазимод.

Из чего исходить при построении квазимод? Нашу задачу можно интерпретировать как задачу квантовой механики о нахождении энергетических уровней и собственных состояний уравнения Шредингера с потенциалом, равным 0 в Ω и ∞ вне Ω . Большие λ в такой интерпретации соответствует квазиклассике ($\hbar \rightarrow 0$). Естественно предположить, что квантовые решения как-то связаны с решением соответствующей задачи классической механики.

Такой задачей классической механики в нашем случае является бильярд, порожденный областью Ω . Бильярд есть динамическая система, описывающая движение по области Ω бильярдного шара, испытывающего упругие отражения от стенок области. При этом трением и эффектами, связанными с размерами шара, пренебрегаем.

В первой главе книги подробно исследуется бильярд, порожденный выпуклой областью Ω , во второй и третьей главах по инвариантным множествам бильярда строятся последовательность квазимод любого наперед заданного порядка.

Инвариантные множества, опираясь на которые мы строим квазимоды, суть семейства инвариантных торов в фазовом пространстве потока, порожденного бильярдом. Движение по инвариантному тору точки в фазовом пространстве, изображающей положение бильярдного шара, в соответствующих координатах (ξ, η) на торе имеет вид

$$\xi = \xi_0 + \omega_1 t \pmod{1}, \quad \eta = \eta_0 + \omega_2 t \pmod{1}$$

(рис.1). Если число $\theta = \omega_1/\omega_2$ иррационально, то траектория плотна на торе и образует его иррациональную обмотку. Если $\theta = m/n$ - рациональное число, то инвариантный тор распадается на континуум замкнутых траекторий. Инвариантные торы, как правило, встречаются не изолированными (в отличие от периодических траекторий), а семействами. Семейства бывают двух типов:

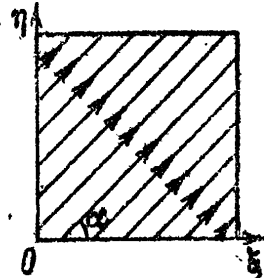
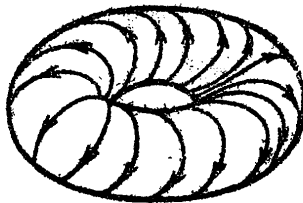


Рис.1. Инвариантный тор и траектории точки, изображающей положение бильярдного шара.

1) непрерывные (рис.2,а), моделью которых является семейство $T^2 \times [a, b]$ с потоком

$$\xi = \xi_0 + \xi t \pmod{1}, \quad \eta = \eta_0 + t \pmod{1}, \quad \zeta = \text{const},$$

здесь (ξ, η, ζ) - стандартная координатная система в $T^2 \times [a, b]$,

$T^2 = S^1 \times S^1 = \mathbb{R}^1/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^1/\mathbb{Z}$ - двумерный тор, $[a, b]$ - интервал на вещественной оси;

2) разрывные (рис. 2, б), модель которых является семейство $T^2 \times E$ с тем же потоком, что и в предыдущем случае, но где $E \subset [a, b]$ - канторово множество, получающееся выбрасыванием из $[a, b]$ счетного набора интервалов $]m/n - c/n^\alpha, m/n + c/n^\alpha[$, окружающих все рациональные числа. Множество $T^2 \times E$ при подходящем выборе c и α имеет положительную меру Лебега.

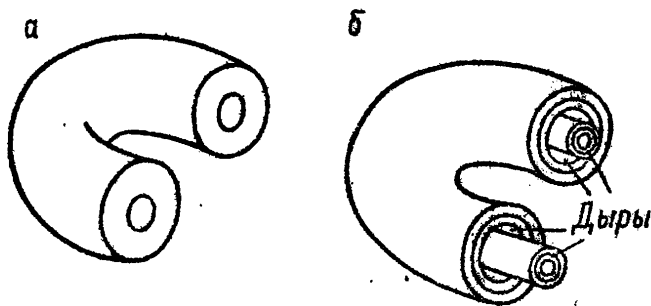


Рис. 2. Семейства инвариантных торов. а - непрерывное, б - разрывное.

При малых возмущениях непрерывные семейства превращаются в разрывные: в них появляются щели, соответствующие рациональным значениям ω_1/ω_2 , т.е. в окрестности периодических траекторий. Разрывные семейства устойчивы относительно

но малых возмущений.

Исследование связанных с этими явлениями вопросов составляет содержание теории КАМ (Колмогоров - Арнольд - Мозер) [11, 3, 4, 32, 44, 45].

Непрерывные семейства инвариантных торов имеются в фазовом пространстве бильярда, порожденного кругом и эллипсом. Все фазовое пространство для этих случаев покрывается конечным числом непрерывных семейств.

Основной результат первой главы настоящей книги - установление существования гладких разрывных семейств инвариантных торов для произвольного выпуклого бильярда.

Как, опираясь на инвариантные торы, строить квазимоды? Полезно было осветить историю этого вопроса. В работе [38] (1917 г.) Альберт Эйнштейн, продолжая идеи Бора и Зоммерфельда, сформулировал условия квантования, предполагая существование непрерывного семейства лагранжевых инвариантных торов (лагранжевость в нашем случае эквивалентна инвариантности).

В 1960 г. Келлер и Рубинов [43] рассмотрели ряд задач, допускающих точное решение и уточнили квантовые условия Эйнштейна добавлением следующих по порядку членов, учитывающих изменение фазы на $\pi/2$ при прохождении каустики. В работах В.П.Маслова [29, 30] (1965 г.) впервые получены строгие результаты в предположении существования инвариантных лагранжевых многообразий, удовлетворяющих условию квантования. Ряд задач, решенных методом параболического уравнения, рассматривается в гл. 6-8 монографии В.М.Бабича, В.С.Булдырева [7] (1972 г.). В этих задачах не предполагается существование непрерывного семейства инвариантных торов, а предполагается, что выполнены некоторые условия устойчивости. При этом получается асимптотика для части собственных чисел, которая имеет плотность нуль в множестве всех собственных чисел. Материал настоящей книги в основном базируется на работах автора [13-28]. В статье Колина де Вердье [48] (1977 г.) содержатся некоторые обобщения тематики, затрагиваемой в этой книге.

Перейдем к изложению сути вопроса. Инвариантный тор T^2 проецируется из фазового пространства в координатное (каковым в нашем случае является Ω) на некоторую его часть (рис.3). При этом возникают особенности, образы которых в общем случае состоят из конечного числа гладких дуг, называемых каустиками. Точки Ω можно разбить на три класса: 1) точки, не покрываемые проекцией тора, 2) точки, покрываемые проекцией тора и не лежащие на каустике, 3) точки, лежащие на каустике. Выражение для квазимоды имеет различный аналитический характер в зависимости от типа точки.

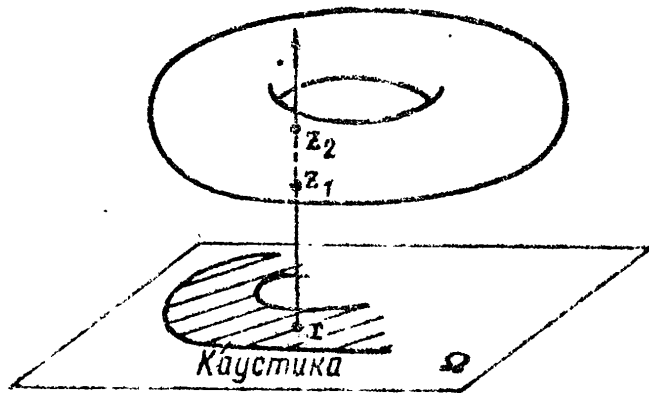


Рис.3. Проецирование инвариантного тора на координатную плоскость.

В окрестности точки, принадлежащей первому классу, $u_k \approx 0$. В окрестности точки, принадлежащей второму классу, квазимоду можно приближенно представить в виде

$$u_k(x) \approx \sum_j A_j(x) e^{i\sqrt{\lambda_k} S_j(x)}, \quad (0.4)$$

где $(\nabla S_j)^2 = 1$, A_j - медленно меняющиеся функции, суммирование распространяется на все прообразы точки x относительно проекции (на рис.3 это точки z_1, z_2). В окрестности каустики помимо слагаемых вида (0.4) появляются слагаемые вида

$$A(x) Ai(\lambda_k^{1/3} \alpha(x)) e^{i\sqrt{\lambda_k} \beta(x)}, \quad (0.5)$$

где Ai - убывающая функция Эйри (см. [7]), (x, y) - декартова координатная система в окрестности каустической точки в Ω , изображенная на рис.4. Функция $Ai(\eta)$ экспоненциально убывает при $\eta \rightarrow +\infty$ и осциллирует при $\eta < 0$. Квазимода "сшивается" из выражений вида (0.4), (0.5), причем из условия однозначности квазимоды возникает условие квантования, из которого определяется λ_k . Так как группа одномерных гомотий двумерного тора с коэффициентами из \mathbb{R} имеет размерность 2, то в условии квантования входят два целых числа.

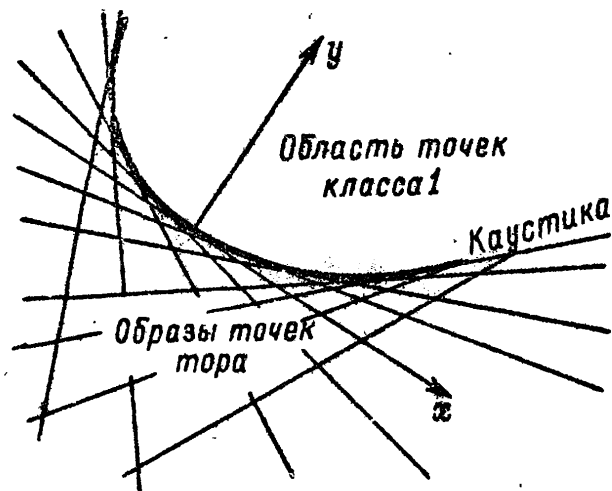


Рис.4. Лучи в окрестности каустики.

На практике, однако, удобно иметь дело не с лоскутной асимптотикой, составленной из выражений вида (0.4), (0.5), а с интегралами типа Фурье, что не меняет сути дела.

В этой книге будет построено массивное множество квазимод. С каждым разрывным семейством инвариантных торов (существование их, как уже отмечалось, гарантировано теоремами первой главы) связывается последовательность квазимод. Если обозначить символом $N^*(\lambda)$ количество собственных чисел задачи

(0.1), аппроксимируемых этими квазиמודами, расположенных в интервале $]0, \lambda[$, то справедлива оценка

$$N^*(\lambda) = \frac{\{\text{Инвариантная мера семейства инвариантных торов}\}}{8\pi^2} \lambda + o(\lambda). \quad (0.6)$$

Сравнение этой формулы с известной формулой Г. Вейля для количества $N(\lambda)$ всех собственных чисел задачи (0.1), расположенных в интервале $]0, \lambda[$ (см. [7, 6]), показывает, что асимптотически при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\frac{N^*(\lambda)}{N(\lambda)} = \frac{\{\text{Инвариантная мера семейства инвариантных торов}\}}{\{\text{Инвариантная мера всего фазового пространства бильярда}\}} + o(1). \quad (0.7)$$

Можно высказать надежду на то, что дальнейшее изучение выпуклого бильярда позволит расклассифицировать почти все инвариантные множества (хотя бы в случае области "общего положения"), связать с каждым инвариантным множеством квазиמודы, и для построенных квазиמוד получить оценку с единицей в правой части (0.7).

Отметим в заключение, что большая часть результатов допускает распространение на случай более общего оператора, чем оператор Лапласа с нулевым граничным условием, а именно на случай эллиптического оператора 2-го порядка с гладкими переменными коэффициентами и самосопряженным краевым условием. Вместо выпуклости здесь нужно требовать от области Ω геодезической выпуклости относительно римановой метрики, связанной с главной частью оператора. Обобщение на многомерный случай содержится в диссертации Н. В. Сванидзе.

Глава I

ВЫПУКЛЫЙ БИЛЛИАРД

В этой главе будет определена и исследована динамическая система, порожденная движением внутри области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ бильярдного шара (материальной точки), испытывающего упругие отражения от границы области. Будем предполагать, что область Ω выпуклая, ограниченная, ее граница $\partial\Omega$ гладкая^{ж)} и кривизна $\partial\Omega$ нигде не обращается в нуль.

§ I. Поток S_t и преобразование T

Начнем с определения потока S_t , $t \in \mathbb{R}^1$, связанного с движением бильярдного шара внутри Ω . Величина скорости шара при упругих соударениях с границей не меняется, поэтому положим ее равной единице. Фазовое пространство Z потока определим следующим образом. Рассмотрим ограничение расслоения единичных касательных векторов к \mathbb{R}^2 на область $\bar{\Omega}$ ($\bar{\Omega}$ — замыкание Ω в \mathbb{R}^2). Пространство этого расслоения отождествим с произведением $\bar{\Omega} \times S^1$, где S^1 — единичная окружность в \mathbb{R}^2 . Пространство Z получим из $\bar{\Omega} \times S^1$ склеиванием вдоль границы, которой в данном случае является $\partial\Omega \times S^1$. Склеивание произведем так: отождествим пары $(x, e_1) \in \partial\Omega \times S^1$ и $(x, e_2) \in \partial\Omega \times S^1$, если e_2 получается из e_1 отражением от границы области в точке $x \in \partial\Omega$, т.е.

$$(e_2, \tau(x)) = (e_1, \tau(x)). \quad (I.1)$$

В формуле (I.1) и далее $\tau(x)$ — касательный вектор к $\partial\Omega$ в

ж) Везде в этой книге слово "гладкий" означает "принадлежащий классу C^∞ ".

точке z , а жирные скобки обозначают скалярное произведение в \mathbb{R}^2 . Заметим, что в $\partial\Omega \times S^1$ не склеиваются точки $(z, \tau(z))$ и $(z, -\tau(z))$, и тор $\partial\Omega \times S^1$ при этом превращается в поверхность Σ , гомеоморфную кольцу $1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ в евклидовой плоскости. Край поверхности Σ , являющийся объединением двух окружностей, обозначим символом $\partial\Sigma$.

Определим поток $S_t: Z \rightarrow Z$, $t \in \mathbb{R}^1$. Если $z = (x, \pm\tau(x)) \in \partial\Sigma$, то положим $S_t z = (x_t, \pm\tau(x_t))$, где x_t — точка на $\partial\Omega$, полученная из $x \in \partial\Omega$ сдвигом вдоль $\partial\Omega$ на дугу длиной $|t|$ в направлении, указываемом вектором $\pm\tau(x) \operatorname{sign} t$. Если же $z = (x, e) \notin \partial\Omega$, то $S_t z = (x_t, e_t)$ определим с помощью следующего построения. Рассмотрим луч, исходящий из точки z в направлении e . Если $x \in \partial\Omega$, то из двух представителей z , а именно (x, e) и $(x, -e)$, выберем тот, у которого второй член пары направлен внутрь Ω . Продолжим этот луч до пересечения с $\partial\Omega$, отразим его от $\partial\Omega$ по закону "угол падения равен углу отражения", продолжим отраженный луч до пересечения с $\partial\Omega$, отразим его в этой точке и т.д. (рис. 5). Построим таким образом полубесконечную ломаную, начинающуюся в точке z и составленную из отрезков прямой, первый из которых соединяет точку z с точкой первого отражения, последующие соединяют последовательные точки отражения. Как показано в работе Хальперна [41], построенная ломаная имеет бесконечную длину.

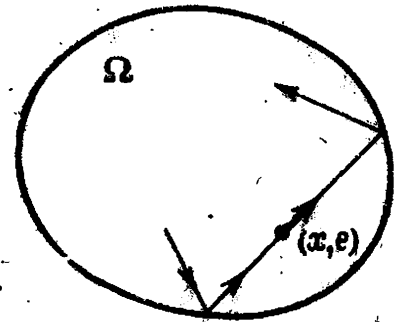


Рис. 5. Траектория бильярдного шара в области Ω .

Пусть $t \geq 0$, x_t — точка, лежащая на этой ломаной на расстоянии t вдоль ломаной от z , e_t — касательный вектор к этой ломаной в точке x_t , направленный в направлении возрастания t . Если $x_t \in \partial\Omega$, то в качестве e_t надо взять предельные значения $e_{t \pm \epsilon}$ при $\epsilon \downarrow 0$. Получившиеся два значения $(e_t)_1$ и $(e_t)_2$ отождествляются при склеивании $\bar{\Omega} \times S^1$ в Z . Таким образом, при всех $t \geq 0$ имеем точку $z_t = (x_t, e_t) \in Z$, которую и примем за $S_t z$. Аналогичным образом определяется $S_t z$ при отрицательных t . При этом выполняется тождество

$$S_{-t} = \sigma S_t \sigma, \quad (1.2)$$

где $\sigma : Z \rightarrow Z$ — инволюция, определяемая формулой $\sigma(x, e) = (x, -e)$. Очевидно, что построенное семейство отображений $S_t : Z \rightarrow Z$, $t \in \mathbb{R}^1$, является непрерывным потоком, и при каждом значении $t \in \mathbb{R}^1$ отображение S_t является гомеоморфизмом.

Введем в $\bar{\Omega} \times S^1$ координатную систему (x, y, φ) , где (x, y) — декартовы координаты точки x в \mathbb{R}^2 , φ — угол, образованный вектором e с осью x . Координатную систему (x, y, φ) будем рассматривать также и в Z , несмотря на то, что там она теряет однозначность при $x \in \partial\Omega$.

Теорема I. Мера $dM = dx dy d\varphi$ инвариантна относительно потока S_t .

Доказательство теоремы I содержится в § 7.

Для многих целей исследование потока полезно свести к исследованию преобразования, высекаемого потоком на некоторой поверхности, называемой секущей. В качестве такой поверхности для S_t удобно взять поверхность $\Sigma \subset Z$, гомеоморфную кольцу $1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, определенную выше. Если $z \in \partial\Sigma$, то $S_t z$ движется по $\partial\Sigma$ со скоростью 1; если же $z \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$, то для такой точки существует бесконечная в обе стороны последовательность моментов времени $\{t_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} t_k = \pm\infty$, такая, что $S_{t_k} z \in \Sigma$. Обозначим буквой T преобразование, высекаемое потоком S_t на поверхности Σ . Если $z \in \partial\Sigma$, то положим $Tz = z$; если $z \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$, то по определению $Tz = S_{t_1} z$, где t_1 — наименьшее положительное число, для которого $S_{t_1} z \in \Sigma$.

С целью наделить Σ гладкой структурой рассмотрим на Σ некоторую совокупность координатных систем. Для определенности с каждой точкой $z \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$ свяжем ту точку $(x, e) \in \partial\Omega \times S^1$ из проектирующихся на Z при описанном выше склеивании, для которой вектор e направлен внутрь Ω .

I. Координатная система (s, θ) . Областью определения этой координатной системы является все Σ . Фиксируем на $\partial\Omega$ в качестве положительного направление обхода против часовой стрелки. Пусть $s(x)$ — длина дуги $\partial\Omega$, заключенной между точкой $x \in \partial\Omega$ и некоторой фиксированной точкой $x^{(0)} \in \partial\Omega$,

взятая со знаком "+" или "-" в зависимости от направления, в котором надо двигаться по дуге из точки $x^{(0)}$ в точку x . Определенная таким образом функция $s(x)$ является многозначной, все ее значения в точке x отличаются друг от друга на $k|\partial\Omega|$, где k - целое число, $|\partial\Omega|$ - длина $\partial\Omega$. Обозначим через $\vartheta(x, e)$ угол, образованный векторами e и $\tau(x)$, где $\tau(x)$ - касательный к $\partial\Omega$ в точке x вектор, направленный в положительную сторону. Будем считать, что $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Тем самым функция $\vartheta(x, e)$ определена на Σ однозначно. Отображение $(x, e) \mapsto (s(x) \pmod{|\partial\Omega|}, \vartheta(x, e))$ есть биекция Σ на $(\mathbb{R}^1 / (|\partial\Omega|\mathbb{Z})) \times [0, \pi]$.

2. Координатная система $(H(x_0), \varphi)$. Фиксируем точку $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Областью определения координатной системы $(H(x_0), \varphi)$ является произвольное непустое открытое множество $\mathcal{U} \subset \Sigma$, не содержащее точек края поверхности Σ . Сопоставим точке $z = (x, e) \in \Sigma$ число $H(x_0, z)$, равное расстоянию от точки x_0 до ориентированной прямой, проходящей через x в направлении e (расстояние берется со знаком "+", если x_0 лежит слева от прямой, и со знаком "-", если справа), и углом $\varphi(z)$, образованный вектором e с некоторым фиксированным заранее направлением.

Если вместо x_0 взять другую точку $x_1 \in \mathbb{R}^2$, то числа $H(x_0, z)$ и $H(x_1, z)$ будут связаны формулой

$$H(x_1, z) = H(x_0, z) - (x_1 - x_0) \sin \varphi + (y_1 - y_0) \cos \varphi, \quad (1.3)$$

(x_i, y_i) , $i = 0, 1$, - декартовы координаты точки x_i . Нетрудно вычислить Якобиан

$$D(H(x_1), \varphi) / D(H(x_0), \varphi) = 1. \quad (1.4)$$

Как связаны друг с другом координаты $(H(x_0), \varphi)$ и (s, ϑ) ? Достаточно это проследить для одного значения x_0 . Выберем $x_0 \in \partial\Omega$. Пусть $s(x_0) = s_0$, $\tau(x_0) = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$.

Лемма 1.1. Координаты $(H(x_0), \varphi)$ и (s, ϑ) одной и той же точки $z \in \Sigma$ связаны соотношениями

$$\varphi = \vartheta + \int_{s_0}^s \frac{ds'}{\rho(s')} + \varphi_0, \quad H(x_0) = \int_{s_0}^s \sin \left(\vartheta + \int_{s'}^s \frac{ds''}{\rho(s'')} \right) ds'. \quad (1.5)$$

[Здесь $\rho(s)$ - радиус кривизны $\partial\Omega$ в точке с координатой s .

Доказательство. На рис.6 рассматриваемая точка $z \in \Sigma$ изображена жирным вектором. Угол γ , образованный касательными к $\partial\Omega$ векторами $\tau(x)$ и $\tau(x_0)$ вычисляется по формуле $\gamma = \int_{s_0}^s \frac{ds'}{\rho(s')}$. Как видно из рисунка, $\varphi - \varphi_0 = \gamma + \vartheta$, откуда получается первая из формул (1.5). Точно так же $\gamma' = \int_{s_0}^{s'} \frac{ds''}{\rho(s'')}$ есть угол, образованный касательным вектором $\tau(x')$ к $\partial\Omega$ в точке $x' \in \partial\Omega$, с координатой $s' \in [s_0, s]$ и вектором $\tau(x_0)$. Угол $\delta = \delta(s')$, образованный вектором $\tau(x')$ и прямой AB , равен $\delta(s') = \varphi - \varphi_0 - \gamma' = \vartheta + \gamma - \gamma' = \vartheta + \int_{s'}^s \frac{ds''}{\rho(s'')}$.

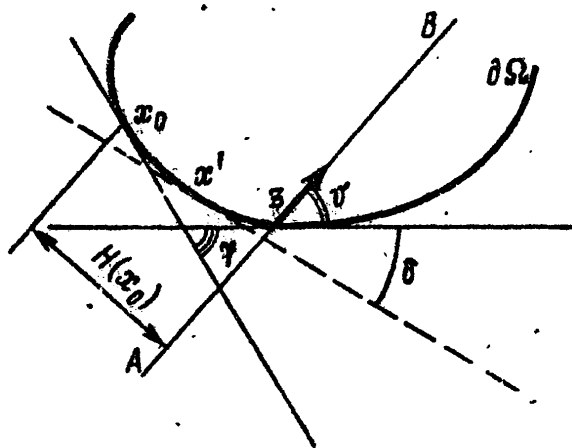


Рис.6. Вспомогательные построения к доказательству леммы 1.1.

Чтобы получить длину $H(x_0)$ перпендикуляра, опущенного из x_0 на AB , надо проинтегрировать $\sin \delta(s') ds'$ в пределах от s_0 до s . ■

(Символ ■ здесь и далее обозначает конец доказательства.)

Зададим с помощью координатной системы (s, ϑ) и всевозможных координатных систем $(H(x_0), \varphi)$ гладкую структуру на Σ . Из соотношений (1.3)-(1.5) следует, что гладкая структура,

определяемая этими координатными системами, принадлежит классу C^∞ . В дальнейшем буква Σ будет обозначать поверхность Σ вместе с введенной на ней таким образом гладкой структурой.

Теорема 2. Отображение $\Gamma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ является диффеоморфизмом класса C^∞ . Мера

$$dm = \sin \vartheta ds d\vartheta = dH(x_0) d\varphi \quad (1.6)$$

инвариантна относительно Γ .

В следующих двух параграфах будет подробно рассмотрено

преобразование T и, в частности, доказана теорема 2.

З а м е ч а н и е 1. Из формул (1.5) следует, что

$$\frac{D(H(x_0), \varphi)}{D(s, \vartheta)} = \sin \vartheta, \quad (1.7)$$

откуда вытекает равенство мер в (1.6). Инвариантность меры $\sin \vartheta ds d\vartheta$ была установлена Биркгофом [8]. Далее докажем инвариантность меры $dH(x_0) d\varphi$, откуда будет следовать в силу сделанного замечания результат Биркгофа.

З а м е ч а н и е 2. Поток S_t обладает симметрией, выражаемой тождеством (1.2). Отсюда следует свойство симметрии преобразования T :

$$T^{-1} = \hat{\sigma} T \hat{\sigma}, \quad (1.8)$$

где $\hat{\sigma}: \Sigma \rightarrow \Sigma$ — инволютивное преобразование, определяемое в координатах (s, ϑ) формулой $(s, \vartheta) \mapsto (s, \pi - \vartheta)$. Из (1.8) следует, что $T: \Sigma \rightarrow \Sigma$ является биекцией.

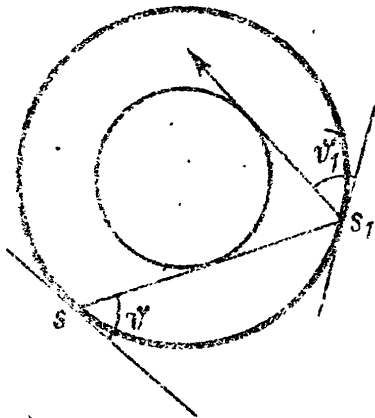


Рис. 7. Преобразование T для круга.

З а м е ч а н и е 3. Край поверхности Σ состоит в точности из всех неподвижных точек преобразования T . Ограничение преобразования на множество $\Sigma \setminus \partial \Sigma$ является взаимно однозначным отображением множества $\Sigma \setminus \partial \Sigma$ на себя.

П р и м е р. Возьмем в качестве Ω круг с радиусом R . Легко видеть (рис. 7), что в координатах (s, ϑ) преобразование T для круга имеет вид $(s, \vartheta) \mapsto (s_1, \vartheta_1)$, где

$$\begin{aligned} s_1 &= s + 2R \vartheta \pmod{2\pi R}, \\ \vartheta_1 &= \vartheta. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Выпишем формулы для преобразования T в координатах $(H, \varphi) = (H(x_0), \varphi)$, взяв в качестве x_0 центр круга. Преобразование T в этих координатах имеет вид $(H, \varphi) \mapsto (H_1, \varphi_1)$, где

$$\begin{aligned} H_1 &= H, \\ \varphi_1 &= \varphi + 2 \arcsin \cos \frac{H}{R} \pmod{2\pi}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Круг наряду с эллипсом (по поводу эллипса см. [7, 9, 43]) является примером области, для которой преобразование T интегрируемо. Об этом более подробно будет сказано в § 5.

§ 2. Исследование преобразования T во внутренних точках Σ

Точку $z \in \Sigma$ назовем внутренней, если $z \in \Sigma \setminus \partial \Sigma$. В этом случае $Tz \neq z$. Пусть $z = (x_0, e_0)$ — внутренняя точка Σ , $z_1 = (x_1, e_1) = Tz_0$. В этом параграфе исследуем поведение преобразования в окрестности z_0 . Фиксируем окрестности $\mathcal{U}_0 \ni z_0$ и $\mathcal{U}_1 \ni z_1$. Будем считать, что $T(\mathcal{U}_0) \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_i \cap \partial \Sigma \neq \emptyset$, $i = 0, 1$. В окрестностях \mathcal{U}_i удобно пользоваться координатными системами $(H(x_i), \varphi)$, причем угол φ отсчитывать от направления e_i . Соответствующие координаты точки $z \in \mathcal{U}_0$ будем обозначать символом (H, φ) , а координаты $\tilde{z} = Tz \in \mathcal{U}_1$ — символом $(\tilde{H}, \tilde{\varphi})$.

Введем в окрестности точки x_1 в \mathbb{R}^2 декартову координатную систему (x, y) , поместив начало координат в точку x_1 и направив ось x по касательной к $\partial \Omega$ в направлении $\tau(x_1)$, а ось y — внутрь Ω . Уравнение $\partial \Omega$ в этих координатах выглядит следующим образом:

$$y = y(x) = \frac{x^2}{2\rho} + O(x^3). \quad (2.1)$$

Здесь ρ — радиус кривизны $\partial \Omega$ в точке x_1 . Обозначим буквой l длину отрезка в \mathbb{R}^2 , соединяющего точки x_0 и x_1 , и пусть δ — координата δ точки z .

Лемма 2.1. Преобразование T в окрестности точки z_0 в указанных локальных координатах имеет вид $(H, \varphi) \mapsto (\tilde{H}, \tilde{\varphi})$, где $H, \varphi, \tilde{H}, \tilde{\varphi}$ связаны уравнениями

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} &= -\varphi + 2 \operatorname{arctg} y'(x^*), \\ \tilde{H} &= x^* \sin(\vartheta + \tilde{\varphi}) - y(x^*) \cos(\vartheta + \tilde{\varphi}).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Здесь $x^* = x^*(H, \varphi)$ определяется из уравнения

$$x^* = \frac{l \sin \vartheta - H}{\sin(\vartheta - \varphi)} + y(x^*) \operatorname{ctg}(\vartheta - \varphi)\tag{2.3}$$

и при $|\varphi| \leq (1/4)\vartheta$ удовлетворяет оценке

$$|x^*| \leq \frac{1}{\sin \vartheta} (C_1 |\varphi| + C_2 |H|).\tag{2.4}$$

Постоянные C_1 и C_2 в (2.4) зависят лишь от области Ω .

Прежде чем доказывать лемму, сформулируем некоторые следствия.

Используя оценки (2.4) и (2.1), нетрудно показать, что из уравнения (2.3) однозначно определяется гладкая функция $x^*(H, \varphi)$, заданная на \mathcal{U}_0 , если только диаметр окрестности \mathcal{U}_0 достаточно мал. Для этого достаточно применить к (2.3) принцип сжатых отображений и теорему о неявной функции. Уравнения (2.2) показывают, в свою очередь, что отображение T в локальных координатах описывается гладкими функциями. Комбинируя этот факт с замечаниями 1.2 и 1.3, получаем, что таким же свойством обладает T^{-1} . Суммируя вышесказанное, получаем следствие.

С л е д с т в и е 2.1. Сужение отображения T на множество внутренних точек Σ есть диффеоморфизм класса C^∞ этого множества на себя.

Вычислим матрицу Якоби отображения T в точке z_0 в указанных в начале параграфа локальных координатах. Учитывая (2.1), из (2.2) - (2.4) получаем

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= -H + l\varphi + O(|\varphi|^2 + |H|^2), \\ \tilde{\varphi} &= -\frac{2}{\rho \sin \vartheta} H + \left(-1 + \frac{2l}{\rho \sin \vartheta}\right) \varphi + O(|\varphi|^2 + |H|^2),\end{aligned}$$

Остальные случаи отличаются лишь изменением знаков в некоторых промежуточных формулах, а результат тот же. На рисунке жирной линией изображена граница области Ω , жирной ломаной — часть траектории бильярдного шара, являющейся проекцией траектории в Z , исходящей из точки z_0 , жирной штриховой ломаной — траектория, являющаяся проекцией траектории, исходящей из точки z с координатами (H, φ) . Пусть $x^* \in \partial\Omega$ — первая точка отражения луча, начинающегося в точке z . Число x^* есть первая координата z^* в координатной системе (x, y) . Учитывая закон отражения, из $\triangle ABz^*$ получаем

$$\gamma = -\tilde{\varphi} + 2\tilde{\theta}, \quad (2.6)$$

а из $\triangle z_1AC$

$$\gamma = -\varphi + 2\theta. \quad (2.7)$$

Вычитая (2.7) из (2.6), имеем

$$\tilde{\varphi} = \varphi + 2(\tilde{\theta} - \theta). \quad (2.8)$$

Из $\triangle z_1BD$ получаем, что

$$\alpha = \tilde{\varphi} + \theta, \quad (2.9)$$

а из $\triangle Ez^*D$

$$\alpha = \arctg y'(x^*) + \tilde{\theta}. \quad (2.10)$$

Исключая α из равенств (2.9) и (2.10), имеем

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\theta} - \theta + \arctg y'(x^*). \quad (2.11)$$

Из выражений (2.8) и (2.11) следует первое из уравнений (2.2).

Рассматривая $\triangle z^*x^*D$, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= |z^*D| \cos \beta = (x^* + y(x^*) \operatorname{tg} \beta) \cos \beta = \\ &= x^* \cos \beta + y(x^*) \sin \beta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Как видно из рис. 8,

$$-\beta = \pi/2 - \tilde{\varphi} - \theta. \quad (2.13)$$

Из равенств (2.12) и (2.13) получаем второе из уравнений (1.2).

Перейдем к выводу уравнения (2.3). Рассматривая треугольники, получаем серию равенств

$$\bar{H} = l \sin \varphi - H \quad (\text{из } \Delta x_0 x_1 F), \quad (2.14)$$

$$|x_1 G| = \bar{H} / \sin \delta \quad (\text{из } \Delta x_1 H G), \quad (2.15)$$

$$|x^* G| = y(x^*) \operatorname{ctg} \delta \quad (\text{из } \Delta x^* x^* G). \quad (2.16)$$

Имеем

$$\begin{aligned} x^* &= |x_1 G| - |x^* G| = \frac{\bar{H}}{\sin \delta} - y(x^*) \operatorname{ctg} \delta = \\ &= \frac{l \sin \varphi - H}{\sin \delta} - y(x^*) \operatorname{ctg} \delta. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Рассматривая $\Delta x_1 A G$ и учитывая (2.7), получаем

$$\delta = \vartheta - \varphi, \quad (2.18)$$

что вместе с равенством (2.17) дает уравнение (2.3).

В рассматриваемом случае $0 < x^* < |x_1 G|$. Поэтому в силу соотношений (2.15), (2.14) и (2.18) при $|\varphi| \leq (1/4) \min\{\vartheta, \pi - \vartheta\}$ имеет место оценка

$$|x^*| \leq \frac{|\bar{H}|}{\sin \delta} \leq \frac{2}{1 - \pi/4} \frac{1}{\sin \delta} (l|\varphi| + |H|). \quad \blacksquare$$

§ 3. Исследование преобразования T в окрестности края поверхности Σ

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось доказать гладкость T и T^{-1} в точках края поверхности Σ . В этом параграфе будет получен требуемый результат и, кроме того, будут выведены формулы, которые далее будут использованы при доказательстве существования семейства инвариантных кривых в малой окрестности $\partial \Sigma$.

В окрестности края по определению гладкой структуры на Σ необходимо пользоваться координатной системой (s, ϑ) . Запишем преобразование T в координатах (s, ϑ) следующим образом: $(s, \vartheta) \mapsto (s + \alpha(s, \vartheta) \pmod{|\partial\Omega|}, b(s, \vartheta))$. Выберем ветвь функции $\alpha(s, \vartheta)$, удовлетворяющую неравенству $0 \leq \alpha(s, \vartheta) < |\partial\Omega|$. По своему определению функции α и b периодические по переменной s с периодом $|\partial\Omega|$. В силу строгой выпуклости Ω неравенство $0 < \alpha(s, \vartheta) < |\partial\Omega|$ выполнено, если только $0 < \vartheta < \pi$. При этих значениях ϑ функции $\alpha(s, \vartheta)$ и $b(s, \vartheta)$, как следует из результатов § 1, 2, являются гладкими. Кроме того, по определению преобразования T $\alpha(s, 0) = b(s, 0) = 0$, $\alpha(s, \pi) = |\partial\Omega|$, $b(s, \pi) = \pi$.

Лемма 3.1. При $0 < \vartheta < \pi$ функции $\alpha(s, \vartheta)$ и $b(s, \vartheta)$ удовлетворяют уравнениям

$$\vartheta + b(s, \vartheta) - \int_s^{s+\alpha(s, \vartheta)} \frac{ds'}{\rho(s')} = 0, \quad (3.1)$$

$$\int_s^{s+\alpha(s, \vartheta)} \sin \left(\vartheta - \int_s^{s'} \frac{ds''}{\rho(s'')} \right) ds' = 0. \quad (3.2)$$

Доказательство. Угол γ (рис. 9), заключенный между касательной к $\partial\Omega$ в точке A с координатой s и касательной к $\partial\Omega$ в точке B с координатой $s = \alpha(s, \vartheta)$, равен $\int_s^{s+\alpha(s, \vartheta)} \frac{ds'}{\rho(s')}$. Рассматривая $\triangle ABC$, получаем уравнение (3.1). Угол $\delta = \delta(s')$, образованный направлением отрезка AB и касательной к $\partial\Omega$ в точке D с координатой $s' \in [s, s + \alpha(s, \vartheta)]$, вычисляется по формуле

$$\delta = \vartheta - \int_s^{s'} \frac{ds''}{\rho(s'')} \quad (3.3)$$

Проецируя элемент дуги на ось, перпендикулярную AB (для этого его нужно умножить на $\sin \delta$), и интегрируя по переменной s' в пределах от s до $s + \alpha(s, \vartheta)$ получаем (3.2) как следствие

того факта, что обе точки A и B проецируются в одну точку упомянутой оси. ■

Обозначим символами ρ_{\max} и ρ_{\min} соответственно максимальное и минимальное значения радиуса кривизны $\partial\Omega$.

Лемма 3.2. Функции $a(s, \vartheta)$ и $b(s, \vartheta)$ удовлетворяют оценкам

$$2\rho_{\min}\vartheta \leq a(s, \vartheta) \leq 2\rho_{\max}\vartheta, \quad (3.4)$$

$$0 \leq b(s, \vartheta) \leq \left(2 \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} - 1\right)\vartheta \quad (3.5)$$

и оценкам, получающимся из (3.4) и (3.5) заменой $a(s, \vartheta)$ на $|\partial\Omega| - a(s, \vartheta)$, $b(s, \vartheta)$ на $\pi - b(s, \vartheta)$, ϑ на $\pi - \vartheta$.

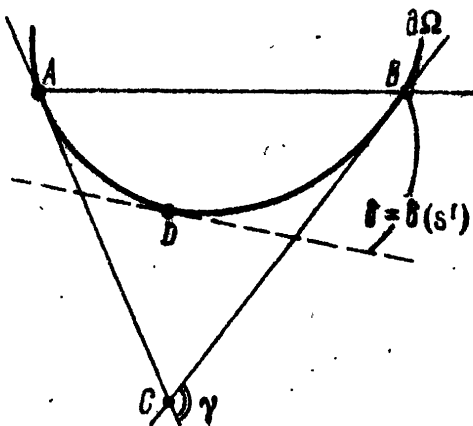


Рис. 9. Вспомогательное построение к доказательству леммы 3.1.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $0 < \vartheta < \pi$. Построим окружности $K_{\rho_{\min}}$ и $K_{\rho_{\max}}$ с радиусами соответственно ρ_{\min} и ρ_{\max} , касающиеся границы Ω в точке $A \in \partial\Omega$ с координатой s и расположенные по ту же сторону, что и Ω , от касательной к $\partial\Omega$ в точке A (рис. 10). Окружность $K_{\rho_{\min}}$ находится целиком в $\bar{\Omega}$, $K_{\rho_{\max}}$ захватывает Ω снаружи. Пусть C — точка на $\partial\Omega$ с координатой $s + \alpha(s, \vartheta)$, B и D — соответственно точки пересечения с $K_{\rho_{\min}}$ и $K_{\rho_{\max}}$ прямой, проходящей через A и C , отличные от A . Из рисунка видно, что длина дуги AC на $\partial\Omega$ заключена между длинами дуг AB на $K_{\rho_{\min}}$ и AD на $K_{\rho_{\max}}$, откуда следует неравенство (3.4). Неравенство (3.5) следует из (3.4) и (3.1). Рассматривая дополнительные дуги, получаем остальные оценки леммы. ■

С л е д с т в и е 3.1. Функции $a(s, \vartheta)$ и $b(s, \vartheta)$ непрерывны на Σ .

Лемма 3.3. Функции $a(s, \vartheta)$ и $b(s, \vartheta)$ являются гладкими на Σ . Их производные порядка k ограничены постоянными, зависящими только от k и $\max\{\rho_{\max}, 1/\rho_{\min}, \max_s |\rho^{(i)}(s)|, 1 \leq i \leq k-1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать этот факт для функции $a(s, \vartheta)$, тогда, как следует из уравнения (3.1), он будет верен и для $b(s, \vartheta)$. Непосредственно применить к уравнению (3.2) теорему о неявных функциях нельзя, так как производная от левой части по переменной a обращается в нуль как раз на интересующем нас множестве $\partial\Sigma$. Сделаем в интеграле s' в (3.2) замену переменной $s' = s + ta$. После сокращения на a уравнение (3.2) перепишется следующим образом:

$$F(a, \vartheta, s) = \int_0^1 \sin\left(\vartheta - \int_s^{s+ta} \frac{ds''}{\rho(s'')}\right) dt = 0. \quad (3.6)$$

Функция F , как легко видеть, гладкая, и для ее производной по a , используя (3.6) и (3.4), можно получить оценку

$$-\frac{\partial F}{\partial a} \geq \frac{1}{4\rho_{\max}}, \quad (3.7)$$

справедливую при условии

$$\vartheta < \frac{\pi}{3} \left(2 \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} - 1\right)^{-1}. \quad (3.8)$$

Применяя к (3.6) теорему о неявной функции и используя оценку (3.7), получаем гладкость функции a и требуемые

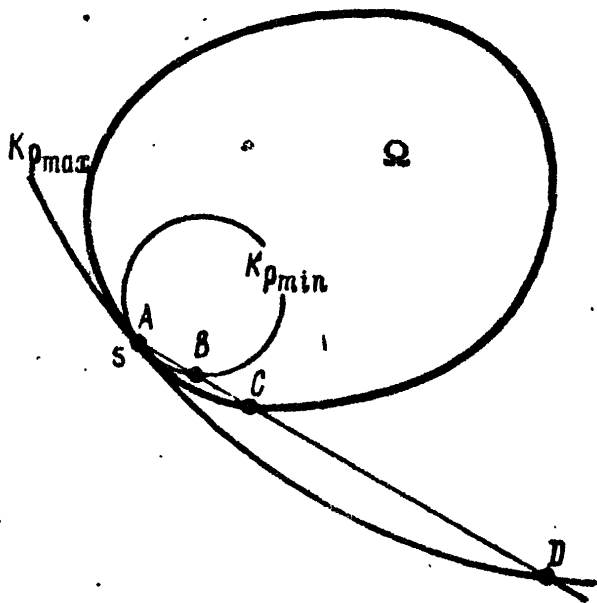


Рис. 10. Вспомогательное построение к доказательству леммы 3.2.

оценки для ее производных в области (3.8). Аналогичное утверждение справедливо и в области $\pi - \vartheta < \text{const}$ в силу (1.8) и теоремы об обратном отображении.

Чтобы получить оценки для производных в оставшейся области, поступим следующим образом. В малой окрестности точки (s, ϑ) перейдем к координатам (H, φ) так, как это было сделано в § 2. Окрестность возьмем такой маленькой, чтобы $\sin(\vartheta - \varphi)$ в уравнении (2.3) был ограничен снизу положительной постоянной, зависящей только от $\max\{\rho_{\max}, 1/\rho_{\min}\}$. Тогда из соотношений (2.2), (2.3) и (1.5) будут следовать требуемые леммой оценки в точке (s, ϑ) с постоянными, не зависящими от (s, ϑ) . ■

Из только что доказанной леммы следует, что T — гладкое отображение. Формула (1.8) показывает, что такое же утверждение справедливо для T^{-1} . Лемма 3.3 завершает тем самым доказательство теоремы 2.

Далее потребуются конкретные формулы, описывающие поведение T в окрестности $\partial\Sigma$, а именно формулы для первых нескольких членов ряда Тейлора T по переменной, пропорциональной расстоянию до $\partial\Sigma$. Край Σ имеет две компоненты, для них координата ϑ принимает значения 0 и π . Обозначим эти компоненты соответственно $\partial\Sigma_0$ и $\partial\Sigma_\pi$. Таким образом, $\partial\Sigma = \partial\Sigma_0 \cup \partial\Sigma_\pi$. В силу симметрии, указанной в замечании 1.2, достаточно рассмотреть окрестность одной из этих компонент. Выберем для определенности компоненту $\partial\Sigma_0$. Разложение T в ряд Тейлора в окрестности $\partial\Sigma_0$ в переменных (s, ϑ) имеет вид

$$(s, \vartheta) \mapsto \left(s + \sum_{k \geq 1} \alpha_k(s) \vartheta^k \pmod{|\partial\Omega|}, \sum_{k \geq 1} \beta_k(s) \vartheta^k \right),$$

где $\alpha_k(s)$ и $\beta_k(s)$ — гладкие, периодические с периодом $|\partial\Omega|$ функции. Приведем результаты вычислений коэффициентов α_k и β_k , $1 \leq k \leq 4$ (при вычислениях были использованы формулы (3.1) и (3.2)):

$$\alpha_1 = 2\rho,$$

$$\beta_1 = 1,$$

$$\alpha_2 = \frac{4}{3} \rho' \rho,$$

$$\beta_2 = -\frac{2}{3} \rho',$$

$$\alpha_3 = \frac{2}{3} \rho'' \rho^2 + \frac{4}{3} \rho'{}^2 \rho,$$

$$\beta_3 = -\frac{2}{3} \rho'' \rho + \frac{4}{9} \rho'{}^2,$$

$$\alpha_4 = \frac{4}{15} \rho''' \rho^3 + \frac{76}{45} \rho'' \rho' \rho^2 -$$

$$\beta_4 = -\frac{2}{5} \rho''' \rho^2 - \frac{44}{45} \rho'' \rho' \rho -$$

$$-\frac{2}{45} \rho' \rho + \frac{16}{135} \rho'{}^3 \rho,$$

$$-\frac{2}{45} \rho' - \frac{44}{135} \rho'{}^3.$$

Интересно выглядит разложение в ряд Тейлора преобразования T , если в окрестности $\partial \Sigma_0$ перейти к новым переменным (x, y) , выбор выражений для которых подсказан некоторыми формулами теории дифракции [7]. Выражение для x , приведенное ниже, входит с отрицательным постоянным множителем в показатель экспоненты, описывающей экспоненциальное затухание в тени при дифракции коротких волн на выпуклой области Ω . Выражение для y получено из требования, чтобы инвариантная мера dm в координатах (x, y) имела простой вид:

$$dm = \text{const} \cdot y dx dy.$$

Положим

$$x = c_1 \int_0^s \rho^{-2/3}(s') ds', \quad y = c_2 \rho^{1/3}(s) \sin \frac{\vartheta}{2}, \quad (3.9)$$

где $c_1 = \left(\int_0^{|\partial \Omega|} \rho^{-2/3}(s) ds \right)^{-1}$, $c_2 = 4c_1$.

Легко видеть, что якобиан $\frac{D(x, y)}{D(s, \vartheta)} = \frac{c_1 c_2}{2} \rho(s)^{-1/3} \cos \frac{\vartheta}{2}$ отличен от нуля, если рассматриваемая окрестность не пересекается с другой компонентой $\partial \Omega$. Непосредственными вычислениями, используя приведенные выше выражения для α_k , β_k , доказыва-ется следующая лемма.

Лемма 3.4. Разложение T в ряд Тейлора в окрестности $\partial \Sigma_0$ в переменных (x, y) имеет вид

$$(x, y) \mapsto \left(x + y + \sum_{k \geq 3} \tilde{\alpha}_k(x) y^k (\text{mod } 1), y + \sum_{k \geq 1} \tilde{\beta}_k(x) y^k \right), \quad (3.10)$$

где $\tilde{\alpha}_k(x)$, $\tilde{\beta}_k(x)$ — гладкие, периодические с периодом 1 функции.

Замечательным фактом является равенство нулю коэффициентов при y^2 в первой компоненте и при y^2 и y^3 во второй компоненте (3.10). Кроме того, коэффициент при y в первой компоненте (3.10) оказался постоянным. Постоянные C_1 и C_2 в (3.9) выбраны из требования, чтобы, во-первых, этот коэффициент был равен единице, во-вторых, выполнялось равенство

$$x(S + |\partial\Omega|) = x(s) + 1.$$

§ 4. Периодические точки

Точка $z_0 \in \Sigma$ называется периодической точкой преобразования T , если $T^n z_0 = z_0$ для некоторого целого положительного n . Наименьшее значение n называется периодом точки z_0 . Последовательность $\{z_0, Tz_0, \dots, T^{n-1}z_0\}$ называется периодической траекторией периода n . Периодические точки с периодом 1 суть неподвижные точки T , множество таких точек совпадает с $\partial\Sigma$. Преобразование T , как будет дальше показано, всегда имеет бесконечное число периодических точек с периодом больше единицы.

Пусть z_0 — периодическая точка с периодом n . Рассмотрим $dT^n(z_0)$. В локальных координатах это вещественная 2×2 матрица, являющаяся произведением n матриц вида (2.5). Так как преобразование T сохраняет меру, определитель матрицы $dT^n(z_0)$ равен единице. Возможны три случая: 1) собственные числа $dT^n(z_0)$ вещественны и равны по абсолютной величине единице, 2) собственные числа $dT^n(z_0)$ вещественны и не равны по абсолютной величине единице, 3) собственные числа $dT^n(z_0)$ мнимы. В первом случае периодическая точка называется вырожденной. Все периодические точки с периодом 1 в нашей ситуации вырожденные. Во втором случае периодическая точка называется гиперболической, в третьем — эллиптической. Для периодической точки эллиптического типа собственные числа матрицы $dT^n(z_0)$ имеют вид $e^{\pm i\alpha}$, $\alpha \in]0, \pi[$.

В периодической траектории все периодические точки одного и того же типа. Поэтому имеет смысл говорить о вырожденной, гиперболической и эллиптической траекториях.

В своей замечательной работе [39] Биркгоф рассмотрел нормальные формы, к которым приводится формальной заменой переменных преобразование, сохраняющее меру, в окрестности неподвижных эллиптической и гиперболической точек. Имея в виду результаты Биркгофа, примем следующее определение. Эллиптическая периодическая точка z_0 с периодом n принадлежит общему эллиптическому типу, если в окрестности z_0 можно ввести координатную систему с началом в точке z_0 , в которой преобразование T имеет вид $(x, y) \mapsto (x_1, y_1)$, где

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos(\alpha + \beta(x^2 + y^2)) - y \sin(\alpha + \beta(x^2 + y^2)) + o((x^2 + y^2)^N), \\ y_1 &= x \sin(\alpha + \beta(x^2 + y^2)) + y \cos(\alpha + \beta(x^2 + y^2)) + o((x^2 + y^2)^N), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$\beta \neq 0$, α/π — иррациональное число, N — любое сколь угодно большое положительное число.

Если в окрестности периодической точки общего эллиптического типа пренебречь погрешностью $o((x^2 + y^2)^N)$, то преобразование T^n в ней устроено как поворот на переменный угол $\alpha + \beta(x^2 + y^2)$. Собственные числа $dT^n(z_0)$ равны $e^{\pm i\alpha}$.

Рассмотрим гиперболическую периодическую точку z_0 с периодом n . Определим устойчивое $W^s(z_0)$ и неустойчивое $W^u(z_0)$ подмногообразия точки z_0 следующим образом:

$$z \in W^s(z_0) \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} T^{nk} z = z_0,$$

$$z \in W^u(z_0) \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow -\infty} T^{nk} z = z_0.$$

Хорошо известно (см., например, [33, § 5.2]), что $W^s(z_0)$ и $W^u(z_0)$ представляют собой гладкие подмногообразия, являющиеся в нашем случае гладкими инъективными погружениями \mathbb{R}^1 в Σ . Касательные векторы к $W^s(z_0)$ и $W^u(z_0)$ в точке

$z_0 \in W^s(z_0) \cap W^u(z_0)$ совпадают с собственными векторами матрицы $dT^n(z_0)$, первый соответствует собственному числу λ_1 , $|\lambda_1| < 1$, второй — собственному числу λ_2 , $|\lambda_2| > 1$. Оба подмногообразия $W^s(z_0)$ и $W^u(z_0)$ инвариантны относительно T^n , причем точки подмногообразия $W^s(z_0)$ ($W^u(z_0)$) под действием T^n сдвигаются вдоль $W^s(z_0)$ ($W^u(z_0)$) по направлению к (от) z_0 .

Пусть z_0 и z_1 — две гиперболические периодические точки (не обязательно с одинаковыми периодами). Подмногообразия $W^s(z_0)$ и $W^u(z_1)$ могут пересекаться. Точка $z \in W^s(z_0) \cap W^u(z_1)$ называется гомоклинической, если z_0 и z_1 принадлежат одной и той же периодической траектории (в частности, могут и совпадать), и гетероклинической, если z_0 и z_1 принадлежат разным периодическим траекториям (рис. II). Гомоклиническая (гетероклиническая) точка z называется трансверсальной, если подмногообразия $W^s(z_0)$ и $W^u(z_1)$ пересекаются в z трансверсально, т.е. касательные векторы в z к $W^s(z_0)$ и $W^u(z_1)$ линейно независимы.

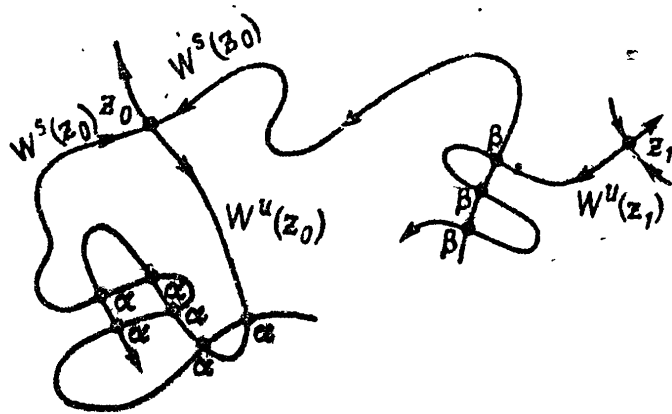


Рис. II. Картина пересечений устойчивых и неустойчивых подмногообразий гиперболических неподвижных точек z_0 и z_1 : α — гомоклинические, β — гетероклинические точки. Изображена лишь небольшая часть этих пересечений.

Будем называть выпуклую область Ω "общей", если преобразование $T: \Sigma \rightarrow \Sigma$ обладает следующими свойствами:

1) все периодические точки периода, большего единицы, являются невырожденными, т.е. только гиперболическими и эллиптическими;

2) все эллиптические периодические точки принадлежат общему эллиптическому типу;

3) все гомоклинические и гетероклинические точки трансверсальны.

Общие области, как оказывается, образуют массивное множество в пространстве всех областей. Чтобы точно сформулировать это утверждение, превратим множество всех строго выпуклых (т.е. таких, кривизна границы которых нигде не обращается в нуль; граница предполагается гладкой) областей, обозначим его буквой Ω , в многообразии Фреше. В качестве модельного пространства возьмем $C^\infty(S^1; \mathbb{R}^1)$ - пространство гладких вещественных функций на окружности, снабженное системой полунорм

$$\|f\|_k = \max_{t \in S^1} \left| \frac{d^k}{dt^k} f(t) \right|, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Обозначим символом $B_\epsilon^{(2)}$ шар в $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^1)$, определяемый неравенствами $\|f\|_k < \epsilon$, $k = 0, 1, 2$.

Пусть $\Omega \in \Omega$. Фиксируем диффеоморфизм $a: S^1 \rightarrow \partial\Omega$. Введем в окрестности $\partial\Omega$ в \mathbb{R}^2 координатную систему (t, n) с помощью отображения $\varphi: S^1 \times]-b, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$, определенно-го формулой

$$\varphi(t, n) = a(t) + n \cdot \dot{n}(a(t)).$$

Здесь $\dot{n}(a)$ - единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке a . При $b < \rho_{\min}$ отображение φ является диффеоморфизмом множества $S^1 \times]-b, b[$ на некоторую окрестность $\partial\Omega$ в \mathbb{R}^2 .

Каждому $f \in B_\epsilon^{(2)}$, $\epsilon < b$, поставим в соответствие область Ω_f , граница которой в координатной системе (t, n) задается уравнением $n = f(t)$. Будем считать, что ϵ настолько мало, что $\Omega_f \in \Omega$ для всех $f \in B_\epsilon^{(2)}$. Тем самым определена инъекция $u_\Omega: B_\epsilon^{(2)} \rightarrow \Omega$. Множество $G \subset \Omega$ назовем открытым, если $u_\Omega^{-1}(G)$ открыто в $C^\infty(S^1; \mathbb{R}^1)$ для всех $\Omega \in \Omega$. Так вводится топология в Ω . Поскольку $C^\infty(S^1; \mathbb{R}^1)$ - пространство Бэра, таким же будет и Ω .

Теорема 3. (теорема Купки-Смейла для выпуклого бильярда).
Множество общих областей есть всюду плотное множество типа G_δ в пространстве Ω .

Доказательство этой теоремы содержится в гл. 5.

Недавно В. Я. Иврий^{ж)} доказал, что для справедливости известной гипотезы Г. Вейля о втором члене в асимптотике $N(\lambda)$ (см. [47]) достаточно равенства нулю меры множества периодических траекторий в Z . Из теоремы 3 следует, что это условие выполняется по крайней мере для "массивного" множества областей, т.е. гипотеза Г. Вейля верна для "почти всех" областей.

Докажем следующую теорему, справедливую для всех $\Omega \in \Omega$.

Теорема 4. Пусть $\Omega \in \Omega$. В любой окрестности $\delta \Sigma$ в Σ имеются периодические траектории преобразования T сколь угодно большого периода: а) не являющиеся эллиптическими, б) не являющиеся гиперболическими.

С л е д с т в и е 4.1. Преобразование T для общей области имеет бесконечное число как гиперболических, так и общего типа эллиптических периодических траекторий.

З а м е ч а н и е 4.1. Как показывает пример круга (см. § 1), все периодические траектории для необщей области могут оказаться вырожденными. В случае эллипса существуют только одна эллиптическая и одна гиперболическая траектории периода 2.

Оставшаяся часть этого параграфа посвящена доказательству теоремы 4. Неэллиптические и негиперболические траектории, существование которых будем устанавливать, скапливаются к $\partial \Sigma$, поэтому все дальнейшие рассуждения этого параграфа будут происходить в малой окрестности $\delta \Sigma_0$, где мы введем координатную систему (x, y) , определенную в конце § 3.

Из леммы 3.4. следует, что в указанных координатах преоб-

ж) И в р и й В. Я. О втором члене спектральной асимптотики для оператора Лапласа-Бельтрами на многообразиях с краем. - Функциональный анализ и его приложения, 1980, т. 14, вып. 2, с. 25-34.

преобразование T имеет вид

$$(x, y) \mapsto (x + y + y^3 f(x, y) \pmod{1}, y + y^4 g(x, y)), \quad (4.2)$$

где f и g - гладкие функции. Рассмотрим в окрестности $\partial \Sigma_0$ новую координатную систему (ξ, η) , связанную с (x, y) формулами

$$\begin{aligned} x &= \xi + \eta^2 u(\xi) \pmod{1}, \\ y &= \eta + \eta^3 v(\xi), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где функции u и v есть гладкие, периодические с периодом I решения системы

$$\begin{aligned} u'(\xi) &= v(\xi) + f(\xi, 0), \\ v'(\xi) &= g(\xi, 0). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из условия сохранения преобразованием T меры следует равенство нулю среднего значения функции $g(\xi, 0)$, что обеспечивает разрешимость системы (4.4) в классе периодических функций. Подставляя (4.3) в (4.2), разлагая в ряд Тейлора и используя (4.4), непосредственно убеждаемся в справедливости следующей леммы.

Лемма 4.1. В координатах (ξ, η) преобразование T имеет вид

$$(\xi, \eta) \mapsto (\xi + \eta + \eta^4 \varphi(\xi, \eta) \pmod{1}, \eta + \eta^5 \psi(\xi, \eta)), \quad (4.5)$$

где φ и ψ - гладкие, периодические с периодом I функции.

Заметим, что точки малой окрестности $\partial \Sigma_0$ имеют координату η , меняющуюся в пределах $0 \leq \eta \leq \eta_0$, где η_0 - малое положительное число. Если в (4.5) $\varphi = \psi = 0$, то преобразование T имеет много периодических точек. Любая окружность $S_{m/n} = \{ (\xi, \eta) : \eta = m/n \}$, где m/n - несократимая дробь, целиком состоит из периодических точек с периодом

n . Установим, что при достаточно большом n ($n > n_0(m)$) часть этих периодических точек обязательно сохранится и для преобразования (4.5), испытав разве лишь деформацию.

Введем удобное представление для преобразования T в окрестности окружности $S_{m/n}$. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — периодические с периодом 1 гладкие функции вещественной переменной x , удовлетворяющие неравенствам

$$\alpha'(x) > -\left(\frac{m}{n}\right)^{-1}, \quad \beta(x) > -\left(\frac{m}{n}\right)^{-1}. \quad (4.6)$$

В окрестности $U_{m/n}$ окружности $S_{m/n}$ рассмотрим координатную систему $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, связанную с (ξ, η) формулами

$$\begin{aligned} \xi &= \tilde{\xi} + \frac{m}{n} \alpha(\tilde{\xi}) \pmod{1}, \\ \eta &= \frac{m}{n} + \frac{m}{n} \tilde{\eta} + \left(\frac{m}{n}\right)^2 \beta(\tilde{\xi}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Упомянутая окрестность $U_{m/n}$ состоит из точек, для которых $-\varepsilon_0 < \tilde{\eta} < \varepsilon_0$, где

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ 1, 1 + \frac{m}{n} \min \beta, \eta_0 \left(\frac{m}{n}\right)^{-1} - 1 - \frac{m}{n} \max \beta \right\}.$$

Число ε_0 подобрано так, чтобы окрестность $U_{m/n}$ содержалась в области $0 < \eta < \eta_0$. Положительное число η_0 возьмем таким малым, чтобы множество $\{(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}): 0 < \tilde{\eta} < \eta_0\}$ содержалось в области определения координатной системы (ξ, η) . Число ε_0 будет положительным, если

$$0 < \frac{m}{n} < \min \left\{ 1, \eta_0 (1 + c_1)^{-1} \right\}, \quad (4.8)$$

где $c_1 > \max |\beta|$.

Пусть^{*)}
$$C = \max_{\substack{0 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq 2 \\ \xi, \eta}} \left\{ \left| D_{\xi}^{\rho_1} D_{\eta}^{\rho_2} \varphi \right| + \left| D_{\xi}^{\rho_1} D_{\eta}^{\rho_2} \psi \right| \right\}.$$

*) Символом D_x здесь и далее обозначается частная производная по переменной x .

Лемма 4.2. Существуют положительные постоянные $n_0 = n_0(C, m)$ и $C_1 = C_1(C, m)$, обладающие свойством: при $n > n_0$ существуют периодические с периодом 1 гладкие функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, удовлетворяющие неравенствам (4.6) и

$$|\alpha| + |\beta| + |\alpha'| + |\beta'| < C_1, \quad (4.9)$$

такие, что преобразование T в координатах $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, введенных формулами (4.7), имеет вид $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \mapsto (\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1)$, где

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_1 &= \tilde{\xi} + \frac{m}{n} + \frac{m}{n} \tilde{\eta} + \left(\frac{m}{n}\right)^4 \tilde{\eta} F_1(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \pmod{1}, \\ \tilde{\eta}_1 &= \tilde{\eta} + \left(\frac{m}{n}\right)^4 G(\tilde{\xi}) + \left(\frac{m}{n}\right)^4 \tilde{\eta} G_1(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

В равенствах (4.10) $G(\tilde{\xi})$ — гладкая функция, периодическая с периодом $1/n$, G_1 и F_1 — гладкие функции, периодические с периодом 1 по переменной $\tilde{\xi}$.

Доказательство этой леммы поместим в конце параграфа. Сейчас займемся выводением следствий из леммы 4.2, касающихся периодических точек.

Лемма 4.3. Функция $G(\tilde{\xi})$ в равенстве (4.10) обращается в нуль по крайней мере в двух разных точках $\tilde{\xi}_+$ и $\tilde{\xi}_-$ на интервале $[0, 1/n[$, причем $G'(\tilde{\xi}_+) \geq 0$, $G'(\tilde{\xi}_-) \leq 0$.

Доказательство. Пусть $G(\tilde{\xi})$ нигде не обращается в нуль или обращается в нуль только в одной точке интервала $[0, 1/n[$. Рассмотрим кривую $\Gamma = \{(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) : \tilde{\eta} = 0\}$. Кривая $T\Gamma$ определяется уравнением $\tilde{\eta} = (m/n)^4 G(\tilde{\xi})$. Эти две кривые не меняются при сдвиге $\tilde{\xi} \mapsto \tilde{\xi} + (1/n) \pmod{1}$. Они либо не пересекаются, либо в полосе $\tilde{\xi} \in [0, 1/n[$ имеют только одну общую точку, поэтому одна из кривых Γ и $T\Gamma$ лежит над другой. Рассмотрим область \mathcal{D} в Σ , заключенную между $\partial\Sigma$ и Γ , тогда $T\mathcal{D}$ будет заключена между $\partial\Sigma_0$ и $T\Gamma$. Из вышесказанного следует, что одна из областей \mathcal{D} и $T\mathcal{D}$ строго содержится в другой, что противоречит сохранению преобразованием T меры с положительной плотностью. Утверждение леммы о

знаках производной функции G следует из того факта, что производная периодической функции не может быть одного знака во всех нулях функции. ■

Если $\tilde{\xi}_0$ — нуль функции $G(\tilde{\xi})$, то как следует из равенства (4.10), последовательность $\{(\tilde{\xi}_0 + k/n, 0)\}$, $0 \leq k \leq n-1$, является периодической траекторией преобразования T с периодом n . Так как функция $G(\tilde{\xi})$ имеет период $1/n$, то число периодических траекторий, получаемых таким образом, равно числу нулей функции $G(\tilde{\xi})$ на интервале $[0, 1/n[$. Обозначим множество этих траекторий $\mathcal{P}_{m/n}$.

Лемма 4.4. Множество $\mathcal{P}_{m/n}$ определено нашими построениями и непусто при всех $n > n_0(\epsilon, m)$. Множества $\mathcal{P}_{m/n}$ при разных m/n попарно не пересекаются.

Доказательство. Первая часть утверждения следует из лемм 4.2 и 4.3. Докажем вторую часть. Пусть $p \in \mathcal{P}_{m/n}$. Спроецируем точки траектории p на ось $\tilde{\xi}$. Если проекции пронумеровать в порядке их следования по оси $\tilde{\xi}$: $\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_{n-1}$, то, как следует из (4.10), преобразование T переставляет проекции так: $\tilde{\xi}_j \mapsto \tilde{\xi}_{j+m \pmod{n}}$. Поэтому траектория p не может принадлежать никакому \mathcal{P}_{m_1/n_1} с $m_1/n_1 \neq m/n$. ■

Для каждой траектории $p \in \mathcal{P}_{m/n}$ определим число $\alpha(p) = G'(\tilde{\xi}_i)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Оно не зависит от i , так как $G(\tilde{\xi})$ периодична с периодом $1/n$. Из леммы 4.3 следует, что в множестве $\mathcal{P}_{m/n}$ имеются две разные траектории p_+ и p_- , для которых $\alpha(p_+) \geq 0$ и $\alpha(p_-) \leq 0$. Следующая лемма утверждает, что тип (вырожденный, эллиптический или гиперболический) траектории $p \in \mathcal{P}_{m/n}$ при достаточно больших n ($n > n_1(\epsilon, m)$) полностью определяется числом $\alpha(p)$, а именно: траектория p вырождена, если $\alpha(p) = 0$; гиперболическая, если $\alpha(p) > 0$; эллиптическая, если $\alpha(p) < 0$. Напомним, что определитель матрицы Якоби преобразования T равен 1, поэтому периодическая траектория с периодом n вырождена, гиперболическая или эллиптическая в зависимости от знака $\text{sp } dT^n - 2$. Символом sp обозначаем след матрицы.

Из вышесказанного вытекает справедливость утверждения теоремы 4.

Лемма 4.5. Пусть

$$U_j = \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{n} + \left(\frac{m}{n}\right)^4 b_j \\ \left(\frac{m}{n}\right)^4 \alpha(p) & 1 + \left(\frac{m}{n}\right)^4 d_j \end{pmatrix}, \quad 0 \leq j \leq n-1,$$

- матрица Якоби преобразования T в точке $(\tilde{\xi}_0 + (m/n)j, 0)$, принадлежащей периодической траектории $p \in \mathcal{P}_{m/n}$, вычисленная в координатах $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$. Здесь

$$b_j = F_1\left(\tilde{\xi}_0 + \frac{m}{n} j, 0\right), \quad d_j = G_1\left(\tilde{\xi}_0 + \frac{m}{n} j, 0\right).$$

Тогда

$$\text{sp}(U_{n-1} U_{n-2} \dots U_1 U_0) = 2 + \left(\frac{m}{n}\right)^5 \alpha(p) \left(n^2 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (4.11)$$

причем постоянная в оценке $O(1/n)$ зависит только от C и m .

Доказательство. Положим $\hat{a} = (m/n)^4 \alpha$ и представим U_j в виде $U_j = U_j^{(0)} + \hat{a} B$, где

$$U_j^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{n} + \left(\frac{m}{n}\right)^4 b_j \\ 0 & 1 + \left(\frac{m}{n}\right)^4 d_j \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица Якоби всей периодической траектории $U = U_{n-1} \dots \dots U_1 U_0$ запишется в виде полинома от \hat{a} :

$$U = U_{n-1}^{(0)} \dots U_1^{(0)} U_0^{(0)} + \hat{a} \sum_{i=0}^{n-1} U_{n-1}^{(0)} \dots U_{i-1}^{(0)} B U_{i-1}^{(0)} \dots U_0^{(0)} + \\ + \sum_{r=2}^n \hat{a}^r \left\{ \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n-1} \prod_{j=0}^{n-1} c_j \right\}, \quad (4.12)$$

где $c_j = \begin{cases} B & \text{при } j \in \{i_1, i_2, \dots, i_r\}, \\ U_j^{(0)} & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Примем за норму матрицы второго порядка $U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ число $\|U\| = \max\{|\alpha|, |\beta|, |\gamma|, |\delta|\}$. Оценим типичный член в (4.12). Так как $U_j^{(0)}$ — треугольная матрица, то произведение этих матриц также треугольная матрица:

$$\tilde{U}_{i_1}^{(j_1)} = U_{j_1+i_1}^{(0)} U_{j_1+i_1-1}^{(0)} \dots U_{j_1+1}^{(0)} U_{j_1}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{b}_{i_1}^{(j_1)} \\ 0 & \tilde{d}_{i_1}^{(j_1)} \end{pmatrix}.$$

Для чисел $\tilde{b}_{i_1}^{(j_1)}$ и $\tilde{d}_{i_1}^{(j_1)}$ нетрудно получить следующие рекуррентные соотношения:

$$\tilde{b}_{i_1+1}^{(j_1)} = \tilde{b}_{i_1}^{(j_1)} + \tilde{d}_{i_1}^{(j_1)} \left(\frac{m}{n} + \left(\frac{m}{n}\right)^4 b_{j_1+i_1+1} \right),$$

$$\tilde{d}_{i_1+1}^{(j_1)} = \tilde{d}_{i_1}^{(j_1)} \left(1 + \left(\frac{m}{n}\right)^4 d_{j_1+i_1+1} \right).$$

Отсюда, учитывая, что $0 \leq i_1 \leq n-1$, получаем

$$\tilde{d}_{i_1}^{(j_1)} = \prod_{j=j_1}^{j_1+i_1} \left(1 + \left(\frac{m}{n}\right)^4 d_{j+1} \right) = 1 + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{i_1+1}^{(j_1)} &= \tilde{b}_{i_1}^{(j_1)} + \left(1 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \left(\frac{m}{n} + \left(\frac{m}{n}\right)^4 b_{j_1-i_1+1}\right) = \\ &= \tilde{b}_{i_1}^{(j_1)} + \frac{m}{n} + o\left(\frac{1}{n^4}\right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

а так как

$$\tilde{b}_0^{(j_1)} = \frac{m}{n} + \left(\frac{m}{n}\right)^4 b_{j_1} = \frac{m}{n} + o\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

то

$$\tilde{b}_{i_1}^{(j_1)} = \frac{m}{n} (i_1 + 1) + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (4.14)$$

Квадрат матрицы B равен нулю. Поэтому в сумме (4.12) возникают члены лишь следующих четырех типов:

$$\tilde{U}_{i_1}^{(j_1)} B \tilde{U}_{i_2}^{(j_2)} B \dots B \tilde{U}_{i_r}^{(j_r)} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{i_1}^{(j_1)} \tilde{b}_{i_2}^{(j_2)} \dots \tilde{b}_{i_{r-1}}^{(j_{r-1})} & \tilde{b}_{i_1}^{(j_1)} \tilde{b}_{i_2}^{(j_2)} \dots \tilde{b}_{i_r}^{(j_r)} \\ \tilde{a}_{i_1}^{(j_1)} \tilde{b}_{i_2}^{(j_2)} \dots \tilde{b}_{i_{r-1}}^{(j_{r-1})} & \tilde{a}_{i_1}^{(j_1)} \tilde{b}_{i_2}^{(j_2)} \dots \tilde{b}_{i_r}^{(j_r)} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{U}_{i_1}^{(j_1)} B \tilde{U}_{i_2}^{(j_2)} B \dots B \tilde{U}_{i_r}^{(j_r)} B = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{i_1}^{(j_1)} \tilde{b}_{i_2}^{(j_2)} \dots \tilde{b}_{i_r}^{(j_r)} & 0 \\ \tilde{a}_{i_1}^{(j_1)} \tilde{b}_{i_2}^{(j_2)} \dots \tilde{b}_{i_r}^{(j_r)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B \tilde{U}_{i_1}^{(j_1)} B \tilde{U}_{i_2}^{(j_2)} B \dots B \tilde{U}_{i_r}^{(j_r)} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{b}_{i_1}^{(j_1)} \tilde{b}_{i_2}^{(j_2)} \dots \tilde{b}_{i_r}^{(j_r)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B \tilde{U}_{i_1}^{(j_1)} B \tilde{U}_{i_2}^{(j_2)} B \dots B \tilde{U}_{i_r}^{(j_r)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{b}_{i_1}^{(j_1)} \tilde{b}_{i_2}^{(j_2)} \dots \tilde{b}_{i_{r-1}}^{(j_{r-1})} & \tilde{b}_{i_1}^{(j_1)} \tilde{b}_{i_2}^{(j_2)} \dots \tilde{b}_{i_r}^{(j_r)} \end{pmatrix}.$$

Из соотношений (4.13) и (4.14) получаем оценки для произведений, присутствующих в этих матрицах:

$$\left| \prod_{k=1}^r \tilde{b}_{i_k}^{(j_k)} \right| = \left(\frac{m}{n} \right)^r \left| \prod_{k=1}^r \left((i_k + 1) + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right| \leq C_1^r,$$

$$\left| \prod_{k=1}^r \tilde{a}_{i_k}^{(j_k)} \right| \leq C_1^r.$$

Здесь c_1 зависит только от c и m . Поэтому

$$\sum_{r=2}^n \hat{\alpha}^r \left\{ \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n-1} \prod_{j=0}^{n-1} c_j \right\} \leq \\ \leq \sum_{r=2}^{\infty} \hat{\alpha} n^r c_1^{r+1} = \frac{\hat{\alpha}^2 n^2 c_1^3}{1 - \hat{\alpha} n c_1} = \alpha^2 O\left(\frac{1}{n^6}\right). \quad (4.15)$$

Аналогичным способом получаются оценки для первого и второго членов в правой части (4.12):

$$U_{n-1}^{(0)} \dots U_1^{(0)} U_0^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{n} + \left(\frac{m}{n}\right)^4 b_{n-1} \\ 0 & 1 + \left(\frac{m}{n}\right)^4 d_{n-1} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{n} + \left(\frac{m}{n}\right)^4 b_0 \\ 0 & 1 + \left(\frac{m}{n}\right)^4 d_0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & m + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ 0 & 1 + \delta \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

где $\delta = O(1/n^3)$,

$$\hat{\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} U_{n-1}^{(0)} \dots U_{i-1}^{(0)} B U_{i+1}^{(0)} \dots U_0^{(0)} = \hat{\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \tilde{b}_{n-i-1} & \tilde{b}_{n-i-1} \tilde{b}_i \\ \tilde{d}_{n-i-1} & \tilde{d}_{n-i-1} \tilde{b}_i \end{pmatrix} = \\ = \hat{\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{m}{n}(n-i) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) & \left(\frac{m}{n}(n-i) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \left(\frac{m}{n}(i+1) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ 1 + O\left(\frac{1}{n^3}\right) & \left(1 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \left(\frac{m}{n}(i+1) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \end{pmatrix} = \\ = \alpha \left(\frac{m}{n}\right)^4 \begin{pmatrix} \frac{m(n+1)}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) & \frac{m^2}{6n} (n+1)(n+2) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ n + O\left(\frac{1}{n^2}\right) & \frac{m(n+1)}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Используя соотношения (4.15)–(4.17) и условие $\det(U_{n-1} \dots U_1 U_0) = 1$, которое выполняется вследствие сохранения меры, легко получить, что коэффициент δ в выражении (4.16) имеет вид

$$\delta = -\alpha \left(\frac{m}{n}\right)^5 n + \alpha O\left(\frac{1}{n^6}\right). \quad (4.18)$$

Из (4.12), (4.16), (4.17), (4.15) и (4.18) следует требуемая формула (4.11). ■

Доказательство леммы 4.2. Для искомого функций α и β получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha\left(x + \frac{m}{n}\right) - \alpha(x) &= \frac{m}{n} \beta(x) + \left(\frac{m}{n}\right)^3 A\left(x + \frac{m}{n} \alpha(x), \frac{m}{n} \beta(x)\right), \\ \beta\left(x + \frac{m}{n}\right) - \beta(x) &= \left(\frac{m}{n}\right)^3 \left\{ B\left(x + \frac{m}{n} \alpha(x), \frac{m}{n} \beta(x)\right) - G(x) \right\}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где
$$A(x, y) = (1+y)^4 \varphi\left(x, \frac{m}{n} + \frac{m}{n} y\right),$$

$$B(x, y) = (1+y)^5 \psi\left(x, \frac{m}{n} + \frac{m}{n} y\right).$$

Если α и β являются решениями (4.19), то, как легко видеть, преобразование T в координатах $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, определенных формулами (4.7), имеет вид (4.10). Будем искать решение системы (4.19) в банаховом пространстве $C^1 \times C^1$, где C^1 – пространство непрерывно дифференцируемых функций, периодических с периодом 1, с нормой $\|f\| = \max_x |f(x)| + \max_x |f'(x)|$. Из структуры уравнений (4.19) следует, что C^1 – решение при $n > n_0(C, m)$ является C^∞ -решением.

Введем в рассмотрение оператор \mathcal{L} , действующий в C^1 по формуле

$$(\mathcal{L}f)(x) = f\left(x + \frac{m}{n}\right) - f(x).$$

Этот оператор имеет n собственных значений $\delta_k = e^{ik\frac{m}{n}2\pi} - 1$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, и пространство C^1 разлагается в прямую сумму собственных подпространств по формуле $f(x) = \sum_{0 \leq k \leq n-1} f_k(x)$, где

$$f_k(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(x + \frac{j}{n}\right) e^{-i\frac{kj}{n}2\pi}. \quad (4.20)$$

Пусть Q и P — проекторы, определенные равенствами $(Qf)(x) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)$, $(Pf)(x) = f_0(x)$. У оператора \mathcal{L} нет обратного, но выражение $\mathcal{L}^{-1}Q$, тем не менее, имеет смысл, т.е. \mathcal{L} обратим на подпространстве:

$$(\mathcal{L}^{-1}Qf)(f) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_k(x)}{\delta_k} \quad (4.21)$$

Оценим норму $\mathcal{L}^{-1}Q$. Из формулы (4.20) следует, что $\|f_k\| \leq \|f\|$, кроме того, δ_k при $k \neq 0$ и $n \geq 2$ удовлетворяет очевидной оценке $|\delta_k| \geq 4/n$. Отсюда получаем, используя (4.21)

$$\|\mathcal{L}^{-1}Q\| \leq \frac{n^2}{4} \quad (4.22)$$

Введенные нами операторы позволяют записать систему (4.19) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \beta &= \left(\frac{m}{n}\right)^3 \mathcal{L}^{-1}QB\left(x + \frac{m}{n}\alpha, \frac{m}{n}\beta\right) - \left(\frac{m}{n}\right)^2 PA\left(x + \frac{m}{n}\alpha, \frac{m}{n}\beta\right), \\ \alpha &= \left(\frac{m}{n}\right)^4 (\mathcal{L}^{-1}Q)^2 B\left(x + \frac{m}{n}\alpha, \frac{m}{n}\beta\right) + \\ &+ \left(\frac{m}{n}\right)^3 \mathcal{L}^{-1}QA\left(x + \frac{m}{n}\alpha, \frac{m}{n}\beta\right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$G(x) = PB\left(x + \frac{m}{n}\alpha, \frac{m}{n}\beta\right). \quad (4.24)$$

Из оценки (4.22) следует, что при достаточно большом n к системе (4.23), рассматриваемой в $C^1 \times C^1$, применим принцип сжатых отображений. Функция $G(x)$ определяется затем из (4.24).

П р и м е ч а н и е. Результаты этого параграфа, относящиеся к теореме 4, получены М.М.Двориним и автором в совместной работе [10].

§ 5. Семейства инвариантных кривых

Помимо периодических траекторий преобразование T обладает инвариантными множествами ряда других типов. Следующий по сложности устройства после периодической траектории тип инва-

риантного множества есть инвариантная замкнутая кривая. Инвариантная замкнутая кривая состоит из одной или нескольких компонент, гомеоморфных окружности. Будем рассматривать только гладкие инвариантные кривые. Однокомпонентные инвариантные кривые, как будет показано, всегда присутствуют в окрестности $\partial\Sigma$, n -компонентные инвариантные кривые - в малой окрестности периодической траектории с периодом n (рис. 12).

Рассмотрим более подробно однокомпонентную инвариантную кривую Γ . Преобразование есть гладкий диффеоморфизм окружности на себя. Число вращения $\mu(T|\Gamma)$ отображения $T|\Gamma$ (см. [34]), которое в данном случае можно определить равенством

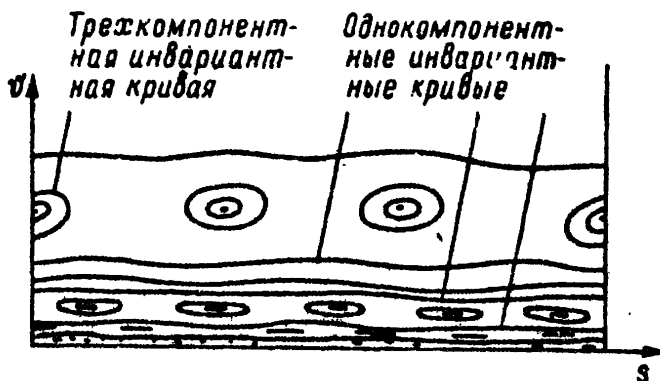


Рис. 12. Инвариантные кривые на поверхности Σ .

$$\mu(T|\Gamma) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k|\partial\Sigma|} s(T^k z), \quad z \in \Gamma, \quad (5.1)$$

вообще говоря, может быть как рациональным, так и иррациональным^{*}). Однако инвариантные кривые Γ , для которых $\mu(T|\Gamma)$ рационально или иррационально, но слишком хорошо аппроксимируется рациональными числами, чрезвычайно неустойчивы по отношению к малым возмущениям преобразования T . В частности, инвариантная кривая с рациональным числом вращения m/n при возмущении общего вида распадается на конечное одинаковое число эллиптических и гиперболических траекторий, что продемонстрировано в § 4.

^{*}) Предел в равенстве (5.1) всегда существует и не зависит от $z \in \Gamma$ (см. [34]). В (5.1) предполагаем, что

$$0 < s(T^{k+1} z) - s(T^k z) < |\partial\Omega|.$$

Будем рассматривать инвариантные кривые Γ , для которых $\mu(T|\Gamma)$ не только иррационально, но обладает дополнительным качеством: плохо аппроксимируется рациональными числами. Более точно: будем предполагать, что $\mu(T|\Gamma)$ удовлетворяет бесконечной последовательности неравенств

$$|n\mu - m| \geq \frac{\sqrt{\epsilon}}{n^\sigma} \quad (5.2)$$

В соотношении (5.2) m пробегает все целые числа, n — все целые положительные, $\sqrt{\epsilon} > 0, \sigma > 1$ — некоторые фиксированные постоянные. Согласно теореме Давкуа [40] на Γ можно ввести "нормализованную" координату ξ , в которой преобразование $T|\Gamma$ выглядит как сдвиг: $\xi \mapsto \xi + \mu(T|\Gamma) \pmod{1}$. Инвариантные кривые, которые будем рассматривать, устроены так, что нормализованная координата есть гладкая координата на Γ .

Если инвариантная кривая Γ имеет n компонент Γ_j , $0 \leq j \leq n-1$, диффеоморфных окружности, то можем рассмотреть преобразование T^n на одной из этих компонент, которая будет инвариантно относительно T^n , и все, сказанное об однокомпонентной кривой, повторить и в этом случае. В формуле (5.1) вместо s надо взять произвольную координату на компоненте Γ , монотонно меняющуюся при обходе этой компоненты, вместо $|\partial\Omega|$ — приращение указанной координаты при однократном обходе компоненты.

Инвариантные кривые описанного вида существуют, как правило, не изолированно, а семействами, каждое из которых является разрывным множеством типа канторова. Члены семейства имеют каждый свое число вращения, которое гладким образом изменяется при переходе от одного члена семейства к другому и удовлетворяет условию типа (5.2). Дыры в семействе связаны с рациональными значениями числа вращения. Семейство инвариантных кривых (точное определение этого понятия будет дано ниже) является более естественным объектом по сравнению с одной инвариантной кривой.

Введем обозначения

$$\Pi = \mathbb{R}^1/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^1, \quad \Pi_{\alpha,b} = \mathbb{R}^1/\mathbb{Z} \times [\alpha, b],$$

$$\Pi_{\alpha,b}^E = \mathbb{R}^1/\mathbb{Z} \times (E \cap [\alpha, b]).$$

Здесь \mathbb{R}^1 — множество всех вещественных чисел, \mathbb{Z} — множество всех целых чисел, \mathbb{R}^1/\mathbb{Z} — одномерный тор, или окружность (которую будем обозначать также буквой S^1) — фактор-группа аддитивной группы вещественных чисел по подгруппе целых чисел, $[\alpha, b]$ — замкнутый интервал в \mathbb{R}^1 , E — подмножество в \mathbb{R}^1 . Пусть Π' — одно из множеств Π , $\Pi_{\alpha,b}$ или $\Pi_{\alpha,b}^E$. Определим преобразование $T_0: \Pi' \rightarrow \Pi$ формулой $(x, y) \mapsto (x + y(\text{mod } 1), y)$.

Рассмотрим диффеоморфизм $T: M \rightarrow M_1$, где M и M_1 — гладкие двумерные многообразия, $M \subset M_1$. Для краткости диффеоморфизмом называем гладкое взаимно однозначное отображение с ненулевым якобианом, не обязательно являющееся отображением "на". Будем говорить, что диффеоморфизм $\Xi: \Pi_{\alpha,b} \rightarrow M$ определяет семейство инвариантных (относительно отображения T) кривых с числами вращения из E , если множество $\Xi(\Pi_{\alpha,b})$ инвариантно относительно преобразования T и

$$\Xi^{-1} \circ T \circ \Xi \Big| \Pi_{\alpha,b}^E = T_0. \quad (5.3)$$

Множество $\Xi(\Pi_{\alpha,b}^E)$ будем называть семейством инвариантных кривых.

В множестве $\Pi_{\alpha,b}$ каждая окружность вида $S^1 \times \{y\}$ является инвариантной относительно T_0 . Сужение T_0 на эту окружность есть сдвиг на y . Из условия (5.3) следует, что образ такой окружности при $y \in E$ является инвариантной относительно T гладкой кривой в M с числом вращения^{*)}, равным y .

Роль множества E далее будет играть множество $E_{\sigma, \sqrt{E}}$, состоящее из всех вещественных чисел, удовлетворяющих арифметическому условию (5.2). Мера Лебега множества $E_{\sigma, \sqrt{E}} \cap [\alpha, b]$ положительна, если только интервал $[\alpha, b]$ не слишком мал. Приведем оценку для меры Лебега этого множества, справедливую при условии $\sigma > 1$ для любого интервала $[\alpha, b]$.

*) Число вращения определяется однозначно по mod 1.

Лемма 5.1.

$$\text{mes}(E_{\sigma, \sqrt{\epsilon}} \cap [a, b]) > b - a - \frac{2\sqrt{\epsilon} \sigma}{\sigma - 1} (b - a + 2\sqrt{\epsilon} + 1). \quad (5.4)$$

Доказательство. Пусть $] \alpha, \beta [$ — произвольный ограниченный открытый интервал в \mathbb{R}^1 . Обозначим символом $N(\alpha, \beta)$ число целых точек, принадлежащих $] \alpha, \beta [$. Эти точки суть $\{[\alpha] + i\}$, $1 \leq i \leq N(\alpha, \beta)$, поэтому

$$N(\alpha, \beta) < \beta - \alpha + 1. \quad (5.5)$$

Чтобы получить множество $E_{\sigma, \sqrt{\epsilon}} \cap [a, b]$, надо выбросить из интервала $[a, b]$ открытые интервалы

$$\tilde{\Delta}_{m, n} =] \frac{m}{n} - \sqrt{\epsilon} n^{-\sigma-1}, \frac{m}{n} + \sqrt{\epsilon} n^{-\sigma-1} [\quad (5.6)$$

для всех пар целых чисел (m, n) , $n > 0$, обладающих свойством $m/n \in] \alpha - \sqrt{\epsilon} n^{-\sigma-1}, b + \sqrt{\epsilon} n^{-\sigma-1} [$. Число N_n интервалов $\tilde{\Delta}_{m, n}$ с фиксированным n конечно и равно $N(n\alpha - \sqrt{\epsilon} n^{-\sigma}, nb + \sqrt{\epsilon} n^{-\sigma})$, что в силу оценки (5.5) меньше $n(b - \alpha) + 2\sqrt{\epsilon} n^{-\sigma} + 1$. Следовательно, сумма длин выбрасываемых интервалов меньше, чем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} 2\sqrt{\epsilon} n^{-\sigma-1} (n(b - \alpha) + 2\sqrt{\epsilon} n^{-\sigma} + 1) \leq \\ & \leq 2\sqrt{\epsilon} (b - \alpha + 2\sqrt{\epsilon} + 1) \zeta(\sigma) \leq \frac{2\sqrt{\epsilon}}{\sigma - 1} (b - \alpha + 2\sqrt{\epsilon} + 1), \end{aligned}$$

что дает оценку (5.4). ■

Существование семейств инвариантных кривых для выпуклого бильярда будем устанавливать, применяя сформулированную ниже теорему, в которой говорится о наличии таких семейств для преобразований, близких к T_0 . В этой теореме рассматривается преобразование $T: \Pi_{\alpha, b} \rightarrow \Pi$, определяемое формулами $(x, y) \mapsto (x_1, y_1)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + y + \sqrt{\epsilon} f(x, y) \pmod{1}, \\ y_1 &= y + \epsilon g(x, y). \end{aligned} \quad (5.7)$$

В выражениях (5.7) число $\epsilon \in]0, 1[$, функции f и g гладкие на $\Pi_{\alpha, b}$ и удовлетворяют оценкам

$$|D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} f| + |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} g| \leq \delta, \quad 0 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq r_0, \quad (5.8)$$

$$r_0 = \left[\frac{\left(2 - \frac{2\sigma+5}{3(\sigma+2)}\right)^3 \cdot 3(\sigma+2) - 1}{1 - \frac{2\sigma+5}{3(\sigma+2)}} \right] + 1. \quad (5.9)$$

Вообще говоря, преобразование вида (5.7) может не иметь ни одной инвариантной кривой. Для примера достаточно рассмотреть случай $f=0$, $g=\delta > 0$. Чтобы исключить такой "снос" по переменной y , сформулируем условие:

(α) Образ при отображении T любой гладкой кривой Γ , задаваемой уравнением вида $y = v(x)$, $x \in S^1$, пересекается с Γ .

Теорема 5. (о семействе инвариантных кривых). Существуют положительные постоянные δ_0 , c_1 и c_2 , зависящие только от σ , такие, что преобразование $T: \Pi_{\alpha, b} \rightarrow \Pi$, задаваемое формулами (5.7), имеет семейство инвариантных кривых с числами вращения из $E_{\sigma, \sqrt{\epsilon}}$, если:

- 1) T удовлетворяет условию (α);
- 2) функции f и g удовлетворяют оценкам (5.8) с $\delta \leq \delta_0$;
- 3) $\sqrt{\epsilon} < \min \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sigma^{-1}, (b-a)(c_1 + 6(1 - \sigma^{-1})^{-1})^{-1} \right\}$.

Это семейство инвариантных кривых определяется диффеоморфизмом $\Xi: \Pi_{\alpha', b'} \mapsto \Pi_{\alpha, b}$, в координатной записи имеющей вид

$$(\xi, \eta) \mapsto (\xi + U(\xi, \eta) \pmod{1}, \eta + V(\xi, \eta)), \quad (5.10)$$

причем справедливы оценки

$$a < a' < a + c_1 \sqrt{\epsilon}, \quad b - c_1 \sqrt{\epsilon} < b' < b, \quad (5.11)$$

$$\left| D_\xi^{\rho_1} D_\eta^{\rho_2} U \right| + (\sqrt{\epsilon})^{-1} \left| D_\xi^{\rho_1} D_\eta^{\rho_2} V \right| < c_2 (\sqrt{\epsilon})^{-\rho_2} \delta^{1 - \frac{\rho_1 + \rho_2 + 2 - \frac{1}{\sigma+2}}{3}}, \quad (5.12)$$

$$0 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq 1.$$

Доказательство теоремы 5 содержится в гл.4. Сейчас получим из нее следствия, касающиеся существования семейств инвариантных кривых для преобразования $T: \Sigma \rightarrow \Sigma$.

Рассмотрим прежде всего малую окрестность $\partial \Sigma$ в Σ . В координатах (x, y) , определенных формулами (3.9), преобразование, как следует из леммы 3.4, имеет вид

$$(x, y) \mapsto (x + y + y^3 a(x, y) \pmod{1}, y + y^4 b(x, y)), \quad (5.13)$$

где a и b — гладкие функции, периодические по переменной x с периодом 1. Следующая лемма является непосредственным обобщением леммы 4.1.

Лемма 5.2. Рассмотрим преобразование $\Pi_{0, y_0} \rightarrow \Pi_{0, a}$ ($a > y_0$) определенное формулой

$$(x, y) \mapsto (x + y + y^{m+1} a(x, y) \pmod{1}, y + y^{m+2} b(x, y)), \quad (5.14)$$

где $m \geq 1$ — натуральное число, a и b — гладкие на Π_{0, y_0} функции. Замена переменных $x = \xi + \eta^m u(\xi)$, $y = \eta + \eta^{m+1} v(\xi)$, где $u(\xi)$ и $v(\xi)$ — периодические функции, определяемые из уравнений

$$\begin{aligned} u'(\xi) &= v(\xi) + a(\xi, 0), \\ v'(\xi) &= b(\xi, 0), \end{aligned} \quad (5.15)$$

приводит преобразование (5.14) к виду

$$(\xi, \eta) \mapsto (\xi + \eta + \eta^{m+2} a_1(\xi, \eta) \pmod{1}, \eta + \eta^{m+3} b_1(\xi, \eta)). \quad (5.16)$$

Применяя лемму 5.2 несколько раз, можно привести (5.13) к виду

$$(\xi, \eta) \mapsto (\xi + \eta + \eta^{r_0+k} \tilde{a}(\xi, \eta) \pmod{1}, \eta + \eta^{r_0+1+k} \tilde{b}(\xi, \eta)), \quad (5.17)$$

где k — произвольное целое положительное число. Рассмотрим преобразование (5.17) в кольце $\Pi_{\frac{1}{2}\theta, \theta}$, где θ — достаточно малое положительное число. Положим $\epsilon = \theta^k$, $f(\xi, \eta) = \epsilon^{-\frac{1}{2}} \eta^{r_0+k} \tilde{a}(\xi, \eta)$, $g(\xi, \eta) = \epsilon^{-1} \eta^{r_0+1+k} \tilde{b}(\xi, \eta)$. Так определенные функции удовлетворяют при достаточно малых θ условиям (5.8). Мы видим, что к преобразованию (5.17), суженному на $\Pi_{\frac{1}{2}\theta, \theta}$, при достаточно малых θ применима теорема 5. Выполнение условия (α) обеспечи-

вается наличием инвариантной меры dm и неподвижной компоненты края $\partial \Sigma_0$. Применяя теорему 5 и используя формулы (3.9), получаем следующую теорему.

Теорема 6. Для любых $\sigma > 1$, $k > 2$ в любой окрестности $\partial \Sigma_0$ существует семейство инвариантных относительно T кривых с числами вращения из $E_{\sigma, \theta^{k/2}} \cap [\alpha\theta, \beta\theta]$. Здесь $\alpha < \beta$ — положительные постоянные, θ — достаточно малое положительное число. В координатной системе (s, θ) уравнение кривой из этого семейства имеет вид

$$\begin{aligned} c_1 \int_0^s \rho^{-k/2}(s) ds &= \xi + \eta^2 u(\xi, \eta), \\ c_2 \rho^{1/2}(s) \sin \frac{\theta}{2} &= \eta + \eta^3 v(\xi, \eta), \\ \eta &\in E_{\sigma, \theta^{k/2}} \cap [\alpha\theta, \beta\theta], \end{aligned} \quad (5.18)$$

Здесь u и v — гладкие функции, определенные в окрестности $\partial \Sigma_0$.

Замечание 5.1. Из леммы 5.1 следует, что при $k > 2$ мера Лебега множества $E_{\sigma, \theta^{k/2}} \cap [\alpha\theta, \beta\theta]$ положительна. Естественной мерой на Σ является инвариантная мера dm . Поскольку она эквивалентна мере Лебега на Σ , получаем, что преобразование T для выпуклого билиярда всегда имеет семейства инвариантных кривых положительной меры dm .

В общем случае мера множества, занятого инвариантными кривыми, может оказаться малой. Покажем, что если область Ω близка к кругу, то существует семейство инвариантных кривых, заполняющее множество меры dm , близкой к $m(\Sigma) = 2|\partial\Omega|$. Пусть уравнение границы области Ω_ε в полярных координатах (R, φ) имеет вид

$$R = R_0 + \varepsilon h(\varphi), \quad (5.19)$$

где $R_0 > 0$, h — 2π -периодическая гладкая функция, ε — малый положительный параметр. Преобразование T для области Ω_ε будем изучать, используя координатную систему (s, θ) . Напомним, что область определения этой координатной системы является все Σ (см. § 1). Используя уравнения (3.1) и (3.2),

нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 5.3. При достаточно малом ε ($\varepsilon < \varepsilon_0(h, R_0)$) преобразование T для области Ω_ε в координатах (s, ϑ) имеет вид $(s, \vartheta) \mapsto (s_1, \vartheta_1)$, где

$$s_1 = s - 2R_0 \vartheta + \varepsilon f(s, \vartheta, \varepsilon) \pmod{|\partial\Omega_\varepsilon|}, \quad (5.20)$$

$$\vartheta_1 = \vartheta + \varepsilon g(s, \vartheta, \varepsilon),$$

f, g - гладкие функции, периодические по s с периодом $|\partial\Omega_\varepsilon|$, производные которых любого порядка ограничены постоянными, не зависящими от ε .

Для того чтобы к преобразованию (5.20) применить теорему 5, нормируем переменные, полагая

$$x = \frac{s}{|\partial\Omega_\varepsilon|}, \quad y = \frac{2R_0}{|\partial\Omega_\varepsilon|} \vartheta, \quad (5.21)$$

$$\hat{f} = |\partial\Omega_\varepsilon|^{-1} \frac{\delta_0 \varepsilon_1}{c} f, \quad \hat{g} = \frac{2R_0}{|\partial\Omega_\varepsilon|} \frac{\delta_0 \varepsilon_1}{c} g. \quad (5.22)$$

В выражениях (5.22) $\delta_0 = \delta_0(\sigma)$ - число, фигурирующее в формулировке теоремы 5, $\varepsilon_1 \in]0, 1[$ - вспомогательный параметр,

$$C = \max_{\substack{0 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq r_0 \\ s, \vartheta}} \left\{ |\partial\Omega_\varepsilon|^{-\rho_1 - 1} (2R_0)^{-\rho_2} \left| D_s^{\rho_1} D_\vartheta^{\rho_2} f \right| + 2R_0 \left| D_s^{\rho_1} D_\vartheta^{\rho_2} g \right| \right\}.$$

В новых переменных преобразование T имеет вид

$$(x, y) \mapsto (x + y + \hat{\varepsilon} \hat{f}(x, y) \pmod{1}, y + \hat{\varepsilon} \hat{g}(x, y)), \quad (5.23)$$

где
$$\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \frac{C}{\delta_0}. \quad (5.24)$$

Если $\hat{\varepsilon}$ мало, то можем применить к соотношению (5.23) теорему 5. Условие (α) выполнено, так как преобразование T сохраняет меру dm . Получаем следующую теорему.

Теорема 7. При $\varepsilon < \delta_1(\sigma) \varepsilon_1 / C$ для билиярда, порожденного областью Ω_ε , существует семейство инвариантных кривых с числами вращения из $E_{\sigma, \sqrt{\hat{\varepsilon}}}$, где $\hat{\varepsilon}$ определено формулой (5.24). Это семейство задается отображением

$$\Xi: \Pi_{c_1\sqrt{\epsilon/\epsilon_1}, 1-c_1\sqrt{\epsilon/\epsilon_1}} \rightarrow \Sigma,$$

которое в координатах (ξ, η) на $\Pi_{c_1\sqrt{\epsilon/\epsilon_1}, 1-c_1\sqrt{\epsilon/\epsilon_1}}$ и (s, ϑ) на Σ имеет вид

$$(\xi, \eta) \mapsto \left(|d\Omega_\epsilon| \left(\xi + u(\xi, \eta) \pmod{1} \right), \frac{|d\Omega_\epsilon|}{2R_0} (\eta + v(\xi, \eta)) \right),$$

причем функции u и v удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} |u| &\leq c_2 \epsilon_1^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3(\sigma+2)}}, & |v| &\leq c_2 \sqrt{\epsilon} \epsilon_1^{-\frac{1}{6} + \frac{1}{3(\sigma+2)}}, \\ |u'_\xi| &\leq c_2 \epsilon_1^{\frac{1}{3(\sigma+2)}}, & |v'_\xi| &\leq c_2 \sqrt{\epsilon} \epsilon_1^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3(\sigma+2)}}, \\ |u'_\eta| &\leq \frac{c_2}{\sqrt{\epsilon}} \epsilon_1^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3(\sigma+2)}}, & |v'_\eta| &\leq c_2 \epsilon_1^{\frac{1}{3(\sigma+2)}}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Постоянные c_1 и c_2 в этих формулах зависят только от σ и C .

Оценим меру множества в Σ , занимаемого инвариантными кривыми семейства, получающегося в теореме 7. Из леммы 5.1 следует, что

$$\text{mes} \left(E_{\sigma, \epsilon} \cap \left[c_1 \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_1}}, 1 - c_1 \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_1}} \right] \right) > 1 - \text{const} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_1}}. \quad (5.26)$$

Из соотношений (5.25) получаем оценку для якобиана:

$$\left| \frac{D(s, \vartheta)}{D(\xi, \eta)} - \frac{|d\Omega_\epsilon|^2}{2R_0} \right| < \text{const} \cdot \epsilon_1^{\frac{1}{3(\sigma+2)}}. \quad (5.27)$$

Используя (5.26) и (5.27), получаем при достаточно малых ϵ_1 оценку для разности мер всего Σ и множества Ξ , заполненного инвариантными кривыми:

$$m(\Sigma \setminus \Xi) \leq \text{const} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_1}}. \quad (5.28)$$

В оценках (5.26)–(5.28) const зависит только от C , R_0 и σ . Если ϵ/ϵ_1 достаточно мало, то, как показывает оценка (5.28), инвариантные кривые заполняют большую часть Σ .

Как уже отмечалось в начале параграфа, в малой окрест-

ности периодической траектории общего эллиптического типа с периодом n имеются n -компонентные инвариантные кривые. Для того чтобы точно сформулировать соответствующую теорему в семействах инвариантных кривых, дадим определение n -компонентного семейства инвариантных кривых. Будем говорить, что набор отображений $\Sigma_j: \Pi_{a,b} \rightarrow \Sigma$, $0 \leq j \leq n-1$, определяет n -компонентное семейство инвариантных (относительно преобразования T) кривых с числами вращения из E , если:

1) для каждого j отображение Σ_j есть диффеоморфизм множества $\Pi_{a,b}$ на $\Sigma_j(\Pi_{a,b})$, причем множества $\Sigma_j(\Pi_{a,b})$ при разных j не пересекаются;

$$2) T(\Sigma_j(\Pi_{a,b})) = \Sigma_{j+1(\text{mod } n)}(\Pi_{a,b});$$

$$3) \Sigma_{j+1(\text{mod } n)}^{-1} \circ T \circ \Sigma_j|_{\Pi_{a,b}} = \begin{cases} \text{Id}, & \text{если } 0 \leq j < n-1, \\ T_0, & \text{если } j = n-1, \end{cases}$$

где Id - тождественное отображение. Набор множеств $\{\Sigma_j(\Pi_{a,b}^E), 0 \leq j \leq n-1\}$ будем называть n -компонентным семейством инвариантных кривых. Очевидно, что каждое из множеств $\Sigma_j(\Pi_{a,b}^E)$ является семейством инвариантных кривых относительно T^n . При $n=1$ это определение превращается в определение семейства инвариантных кривых, данное на с.45.

Пусть z_0 - периодическая точка с периодом n , принадлежащая общему эллиптическому типу. Это означает (см. § 4), что в малой окрестности z_0 имеется координатная система (x,y) с началом в точке z_0 , в которой преобразование T^n имеет вид (4.1). Вводя полярные координаты $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arcsin(x/r)$, получаем следующее представление для T^n в окрестности z_0 :

$$(r, \varphi) \mapsto (r + O(r^{2N+1}), \varphi + \alpha + \beta r^2 + O(r^{2N+4})), \quad (5.29)$$

где N - любое положительное число, $\beta \neq 0$. Перепишем это преобразование в координатах $\xi = \frac{1}{2\pi} \varphi$, $\eta = \frac{\beta}{2\pi} r^2 + \frac{\alpha}{2\pi}$:

$$(\xi, \eta) \mapsto \left(\xi + \eta + \left(\eta - \frac{\alpha}{2\pi} \right)^{N+1} f(\xi, \eta) \pmod{1}, \eta + \left(\eta - \frac{\alpha}{2\pi} \right)^{N+2} g(\xi, \eta) \right),$$

$$\frac{\alpha}{2\pi} \leq \eta < \frac{\alpha}{2\pi} + \varepsilon_0 \quad \text{или} \quad \frac{\alpha}{2\pi} - \varepsilon_0 < \eta < \frac{\alpha}{2\pi} \quad (5.30)$$

в зависимости от знака β . Преобразование (5.30) лишь немногим отличается от (5.17). Применяя те же аргументы, что и при выводе теоремы 6, получаем следующую теорему:

Теорема 8. Для любых $\sigma > 1$, $k > 2$ в любой окрестности периодической траектории общего эллиптического типа с периодом n имеется n -компонентное семейство инвариантных кривых с числами вращения из $E_{\sigma, \theta^{k/2}} \cap \left[\frac{\alpha}{2\pi} + \alpha_1 \theta, \frac{\alpha}{2\pi} + \alpha_2 \theta \right]$.
Здесь $\alpha_1 < \alpha_2$ — не равные нулю постоянные, $\text{sign } \alpha_i = \text{sign } \beta$, θ — достаточно малое положительное число.

В заключение сделаем одно общее замечание, касающееся структуры инвариантных множеств преобразования T в случае "общей" области. Будем называть преобразование $T: \Sigma \rightarrow \Sigma$ интегрируемым, если Σ с точностью до множества меры Лебега нуль покрывается конечным набором семейств инвариантных кривых (число компонент может быть любое) с числами вращения из \mathbb{R} . Преобразование T (или T^n) на таком семействе сопряжено косому сдвигу $(x, y) \mapsto (x + y \pmod{1}, y)$ на кольце $\Pi_{a, b}$. Примерами интегрируемых преобразований являются преобразования T для круга (см. § 1) и эллипса. Никакие другие примеры интегрируемого преобразования, связанного с выпуклой областью, имеющей гладкую границу, автору не известны. С другой стороны, для общей области преобразование T не является интегрируемым, так как интегрируемое преобразование имеет много вырожденных периодических траекторий, а по определению общей области (см. § 4) их у соответствующего преобразования T быть не должно. В случае общей области в силу теоремы 4 преобразование T имеет много эллиптических и гиперболических периодических точек. Как показывают рассмотрения § 4, эллиптические точки, окруженные n -компонентными семействами инвариантных кривых, гиперболические точки, устойчивые и неустойчивые многообразия которых трансверсально пересекаются, образуя запутанную сеть, возникают в каждой щели любого семейства инвариантных кривых, отвечающей рациональному значению числа вращения. Для общей области все семейства инвариантных кривых будут иметь такие щели для каждого рационального значения числа вращения, и их строение приближенно изображено на рис. 13.

В окрестности гиперболической периодической траектории возникает гиперболическое инвариантное множество (см. [1, 2]). Неизвестно, существует ли для преобразования T гиперболическое инвариантное множество положительной меры Лебега.

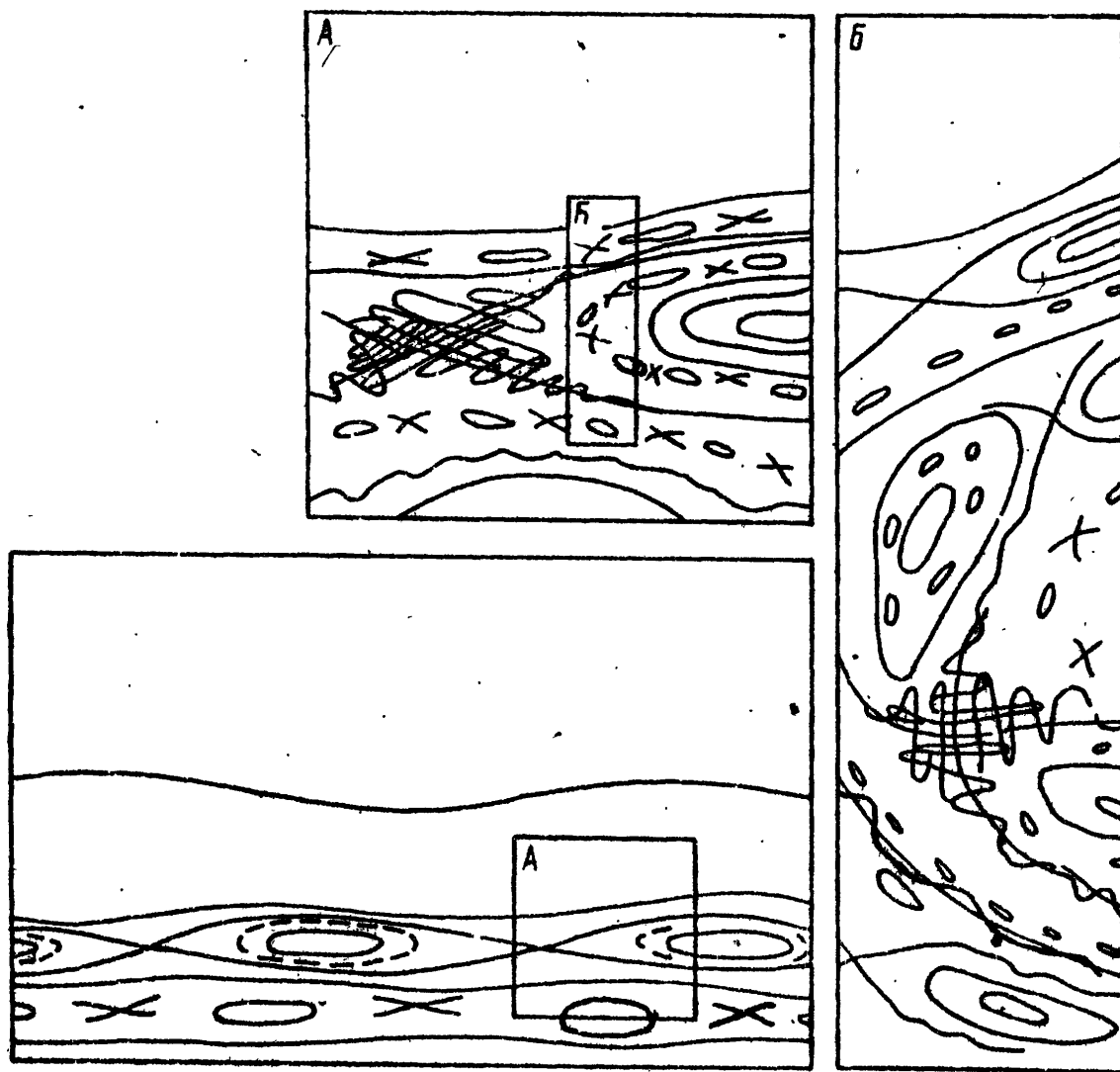


Рис. 13. Строение инвариантных множеств на поверхности Σ . Часть А изображена сверху в увеличенном виде. В свою очередь часть В изображена справа в увеличенном виде. Этот процесс можно продолжать до бесконечности, вскрывая все большую и большую сложность картин.

Не исключено, что семейства инвариантных кривых, определенные в этом параграфе, заполняют все Σ с точностью до множества меры нуль.

§ 6. Некоторые формулы, связанные с семейством инвариантных кривых. Мера множества, заполненного инвариантными торами

Материал этого параграфа имеет вспомогательный характер. Здесь будут построены некоторые функции, в терминах которых в следующих двух главах будет выражена асимптотика собственных чисел оператора Лапласа для области Ω , а также будет доказана теорема I и вычислена инвариантная мера множества в фазовом пространстве потока S_t , заполняемого семейством инвариантных торов, соответствующим семейству инвариантных кривых.

Пусть набор отображений $\Sigma_j: \Pi_{\alpha, b} \rightarrow \Sigma$, $0 \leq j \leq n-1$, определяет n -компонентное семейство инвариантных кривых с числами вращения из E . Доопределим Σ при $j=-1$ и $j=n$, положив

$$\Sigma_{-1}(\xi, \eta) = \Sigma_{n-1}(\xi - \eta, \eta), \quad \Sigma_n(\xi, \eta) = \Sigma_0(\xi + \eta, \eta). \quad (6.1)$$

Тогда при $-1 \leq j \leq n-1$ будет выполняться равенство

$$T \circ \Sigma_j | \Pi_{\alpha, b}^E = \Sigma_{j+1} | \Pi_{\alpha, b}^E. \quad (6.2)$$

В рассмотрении этого параграфа качество множества E не играет роли. Будем предполагать, что множество E замкнуто и не содержит рациональных чисел. Отсюда, в частности, следует, что множества $\Sigma_j(\Pi_{\alpha, b})$ замкнуты и не пересекаются с $\partial \Sigma$. Приведем список обозначений, которых будем далее придерживаться.

1) $\Gamma_\eta^{(j)}$ — образ окружности $\eta = \text{const}$ при отображении Σ_j , $j = 0, 1, \dots, n-1$; $\Gamma_\eta = \bigcup_{j=0}^{n-1} \Gamma_\eta^{(j)}$. Если $\eta \in E \cap [\alpha, b]$, то Γ_η — инвариантная кривая относительно преобразования T .

2) Для каждого $z = (x, e) \in \Sigma$ символы $x(z)$ и $e(z)$ обозначают соответственно первую и вторую компоненты z , $x(z) \in \partial \Omega$ — единичный вектор, не направленный во внешность

Ω ; $\text{line}(z)$ обозначает ориентированную прямую в \mathbb{R}^2 , проходящую через точку z в направлении $e(z)$.

3) Фиксируем некоторую окрестность множества $\bigcup_{j=0}^{n-1} \Sigma_j(\Pi_{\alpha, \beta})$, не пересекающуюся с $\partial \Sigma$, и рассмотрим в ней для каждого $x \in \mathbb{R}^2$ координатную систему $(H(x), \varphi)$ (см. § I). Угол φ будем отсчитывать от некоторого фиксированного направления. Координаты точки z обозначим $H(x, z)$ и $\varphi(z)$.

4) $z_j(\xi, \eta)$ — точка поверхности Σ , являющаяся образом точки $(\xi, \eta) \in \Pi_{\alpha, \beta}$ при отображении Σ_j , $-1 \leq j \leq n$,

$$x_j(\xi, \eta) = x(z_j(\xi, \eta)), \quad e_j(\xi, \eta) = e(z_j(\xi, \eta)),$$

$$H_j(x, \xi, \eta) = H(x, z_j(\xi, \eta)), \quad \varphi_j(\xi, \eta) = \varphi(z_j(\xi, \eta)).$$

В декартовой системе координат (x, y) , в которой ось x совпадает с направлением $\varphi = 0$,

$$e_j(\xi, \eta) = (\cos \varphi_j(\xi, \eta), \sin \varphi_j(\xi, \eta)).$$

Введем ортогональный вектор

$$n_j(\xi, \eta) = (-\sin \varphi_j(\xi, \eta), \cos \varphi_j(\xi, \eta)).$$

5) В координатной системе (s, θ) (см. § I) точка $z_j(\xi, \eta)$ изображается парой $(s_j(\xi, \eta), \theta_j(\xi, \eta))$.

6) $\tau_j(\xi, \eta)$ — единичный вектор, касательный к $\partial \Omega$ в точке $x_j(\xi, \eta)$. Фиксируем некоторое положительное направление обхода $\partial \Omega$. Вектор $\tau_j(\xi, \eta)$ направлен в положительную сторону.

Определим набор функций

$$S_j(x, x^*, \xi_0, \xi, \eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} H_j(x^*, \xi', \eta) d\varphi(\xi', \eta) + (x - x^*, e_j(\xi, \eta)), \quad 0 \leq j \leq n-1. \quad (6.3)$$

Интегрирование в (6.3) происходит по переменной ξ' . Выражение вида (a, b) , где a и b — векторы, обозначает здесь и далее обычное скалярное произведение векторов a и b в евклидовом пространстве. Функция $S_j(x, x^*, \xi_0, \xi, \eta)$ не является периодической функцией переменной ξ , т.е. как функция переменных ξ, η не будет однозначной на $\Pi_{\alpha, \beta}$. Когда переменная ξ увеличивается на единицу, к функции $S_j(x, x^*, \xi_0, \xi, \eta)$ прибавляется число

$$\mathcal{P}(\eta) = \int_0^1 H_j(x^*, \xi', \eta) d\varphi_j(\xi', \eta), \quad (6.4)$$

которое при $\eta \in E \cap [a, b]$ не зависит от x^* и j . Независимость от x^* следует из тождества (1.3). Независимость от j следует из сохранения преобразованием T меры dm и следующего геометрического смысла величины $\mathcal{P}(\eta)$ (рис. 14). В случае нескольких компонент ($n > 1$) число $\mathcal{P}(\eta)$ равно (с точностью до знака) инвариантной мере области, ограниченной любой из компонент инвариантной кривой Γ_η в Σ . В случае одной компоненты ($n = 1$) $|\mathcal{P}(\eta)|$ есть мера области, ограниченной инвариантной кривой Γ_η и линией $\vartheta = \pi/2$. Отметим, что при $\eta \notin E \cap [a, b]$ правая часть (6.4), вообще говоря, зависит от j .

Из этих рассуждений можно сделать важный для дальнейших рассуждений вывод о том, что $\mathcal{P}(\eta) \neq 0$ и сохраняет знак при всех $\eta \in E \cap [a, b]$. Выбрав соответствующим образом ориентацию \mathbb{R}^2 (направление отсчета угла φ), можно добиться того, что $\mathcal{P}(\eta)$ будет положительным. Кроме того, $d\mathcal{P}(\eta)/d\eta \neq 0$ и сохраняет знак при всех $\eta \in E \cap [a, b]$. Этот факт является следствием того, что Σ_j — диффеоморфизм $\Pi_{a,b}$ на $\Sigma_j(\Pi_{a,b})$.

Определим функцию $\mathcal{Q}(\eta)$, $\eta \in E \cap [a, b]$ формулой

$$\mathcal{Q}(\eta) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{Q}_j(x^*, \xi_0, \eta), \quad (6.5)$$

где $\mathcal{Q}_j(x^*, \xi_0, \eta) = -S_j(x_j(\xi, \eta), x^*, \xi_0, \xi, \eta) +$

$$+ S_{j-1}(x_j(\xi, \eta), x^*, \xi_0, \xi, \eta). \quad (6.6)$$

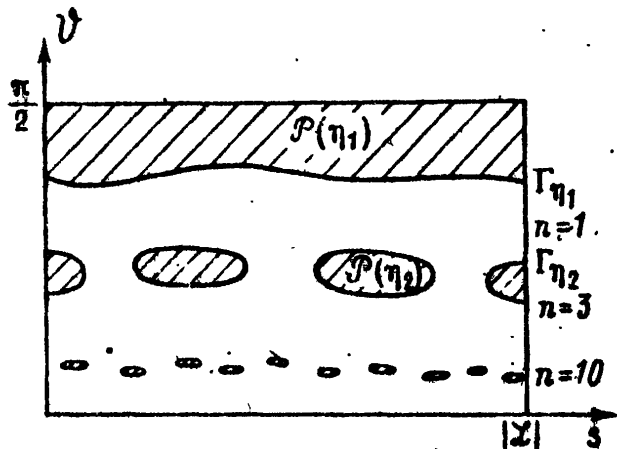


Рис. 14. Геометрический смысл $\mathcal{P}(\eta)$.

Здесь по определению

$$S_{-1}(x, x^*, \xi_0, \xi, \eta) = S_{n-1}(x, x^*, \xi_0, \xi - \eta, \eta).$$

Убедимся в том, что правая часть (6.6) при $\eta \in E \cap [a, b]$ не зависит от ξ . Для этого вычислим производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_j}{\partial \xi} = & -(\tau_j(\xi, \eta), e_j(\xi, \eta) - e_{j-1}(\xi, \eta)) \frac{\partial s_j(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \\ & + \left(x^* - x_j(\xi, \eta), n_j(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} - n_{j-1}(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \xi} \right) - \\ & - H_j(x^*, \xi, \eta) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} + H_{j-1}(x^*, \xi, \eta) \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Первый член в выражении (6.7) равен нулю, так как вектор $e_j(\xi, \eta) - e_{j-1}(\xi, \eta)$ в силу закона отражения ортогонален к $\partial \Omega$ в точке $x_j(\xi, \eta)$. Преобразуем оставшиеся члены, воспользовавшись тождеством (1.3). Получаем

$$\frac{\partial Q_j}{\partial \xi} = -H_j(x_j(\xi, \eta), \xi, \eta) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} + H_{j-1}(x_j(\xi, \eta), \xi, \eta) \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \xi}. \quad (6.8)$$

Оба члена в правой части (6.8) равны нулю в силу определения функции $H(x, z)$: точка $x_j(\xi, \eta)$ лежит на пересечении $\text{line}(z_j(\xi, \eta))$ и $\text{line}(z_{j-1}(\xi, \eta))$.

Покажем теперь, что правая часть (6.5) не зависит от x^* и ξ_0 . Для этого совершим в сумме (6.5) преобразование Абеля. Получим

$$\begin{aligned} Q(\eta) = & \sum_{j=0}^{n-2} (e_j, x_{j+1} - x_j) - (e_{n-1}, x^* - x_{n-1}) - \\ & - (e_{-1}, x^* - x_0) - \int_{\xi-\eta}^{\xi} H_{n-1}(x^*, \xi', \eta) d\varphi_{n-1}(\xi', \eta). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Используя формулу (1.3), преобразуем правую часть (6.9) к виду

$$Q(\eta) = \sum_{j=0}^{n-2} (e_j, x_{j+1} - x_j) + (e_{n-1}, x_0 - x_{n-1}) - \int_{\xi-\eta}^{\xi} H_{n-1}(x_0(\xi, \eta), \xi', \eta) d\varphi_{n-1}(\xi', \eta). \quad (6.10)$$

Последнее выражение показывает, что $Q(\eta)$ не зависит от x^* и ξ_0 .

Функции $\mathcal{P}(\eta)$ и $Q(\eta)$ будут играть существенную роль

в так называемых "условиях квантования", с помощью которых будет построена асимптотика серии собственных чисел оператора Лапласа в области Ω , отвечающая данному семейству инвариантных кривых. Поясним геометрический смысл функций $\mathcal{P}(\eta)$ и $Q(\eta)$ в случае, когда Ω - круг. В этом случае вся поверхность Σ расслаивается на инвариантные кривые Γ_η , $\eta \in [0, 1]$. Рассмотрим семейство прямых $line(z_0(\xi, \eta))$. При фиксированном η имеем однопараметрическое семейство прямых, имеющее огибающую K_η , которую назовем каустикой. Пусть радиус круга Ω равен R_0 (рис. 15). Тогда каустика K_η будет концентрической окружностью с радиусом $R_0 |\cos \pi \eta|$. Функции $\mathcal{P}(\eta)$ и $Q(\eta)$ легко вычисляются:

$$\mathcal{P}(\eta) = 2\pi R_0 \cos \pi \eta,$$

$$Q(\eta) = 2\pi R_0 \sin \pi \eta - 2\pi R_0 \eta \cos \pi \eta. \quad (6.11)$$

При $\eta \in [0, 1/2]$ значение $\mathcal{P}(\eta)$ равно длине дуги каустики K_η , значение $Q(\eta)$ - сумме длин отрезков AC и BC минус длина дуги отрезка каустики AmB (см. рис. 15).

В случае семейства инвариантных кривых, близких к краю Σ , каждой инвариантной кривой Γ_η также соответствует каустика K_η , и функции $\mathcal{P}(\eta)$ и $Q(\eta)$ имеют аналогичный геометрический смысл. То же самое можно сказать о семействе инвариантных кривых для случая области, близкой к кругу.

Каждая инвариантная кривая семейства $\{\Gamma_\eta\}_{\eta \in E \cap [a, b]}$ есть пересечение инвариантного относительно потока S_t двумерного тора \mathcal{T}_η в пространстве Z с поверхностью Σ . В терминах функций $\mathcal{P}(\eta)$ и $Q(\eta)$ можно выразить инвариантную меру dM множества в Z , занимаемого объединением инвариантных торов $\{\mathcal{T}_\eta\}_{\eta \in E \cap [a, b]}$. Прежде чем форму-

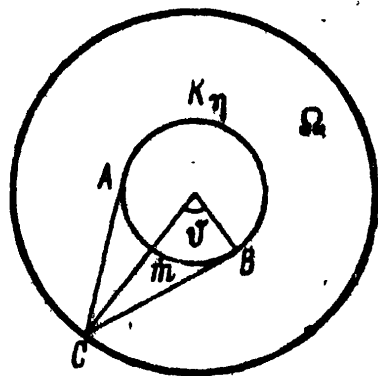


Рис. 15. Пояснения к вычислению $\mathcal{P}(\eta)$ и $Q(\eta)$ для круга.

лизовать соответствующее утверждение, приведем доказательство инвариантности меры, обещанное в § I.

Доказательство теоремы I. Рассмотрим на Z координатную систему (x, y, φ) (см. определение координатной системы (x, y, φ) непосредственно перед формулировкой теоремы I). Пусть $(x_0, y_0, \varphi_0) \in Z$ и $(x_0^t, y_0^t, \varphi_0^t) = S_t(x_0, y_0, \varphi_0)$. Достаточно доказать следующее утверждение: если $t > 0$, $(x_0, y_0, \varphi_0) \notin \Sigma$, $(x_0^t, y_0^t, \varphi_0^t) \notin \Sigma$, то

$$\frac{D(x_0^t, y_0^t, \varphi_0^t)}{D(x_0, y_0, \varphi_0)} = 1. \quad (6.12)$$

Рассмотрим два случая.

1) Отрезок траектории, соединяющий (x_0, y_0, φ_0) с $(x_0^t, y_0^t, \varphi_0^t)$ не пересекает Σ . Тогда очевидно

$$\begin{aligned} x_0^t &= x_0 + t \cos \varphi_0, \\ y_0^t &= y_0 + t \sin \varphi_0, \\ \varphi_0^t &= \varphi_0. \end{aligned}$$

Равенство (6.12) проверяется прямым вычислением.

2) Отрезок траектории, соединяющий (x_0, y_0, φ_0) с $(x_0^t, y_0^t, \varphi_0^t)$ пересекает один раз поверхность Σ . Рассмотрим в малой окрестности точки (x_0, y_0, φ) координатную систему (H, l, φ) . Положив

$$\begin{aligned} H &= (x - x_0) \sin \varphi - (y - y_0) \cos \varphi, \\ l &= (x - x_0) \cos \varphi + (y - y_0) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Очевидно, что $D(H, l, \varphi)/D(x, y, \varphi) = 1$. Аналогичным образом рассмотрим в малой окрестности $(x_0^t, y_0^t, \varphi_0^t)$ координатную систему $(\tilde{H}, \tilde{l}, \tilde{\varphi})$, положив

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= (x - x_0^t) \sin \varphi - (y - y_0^t) \cos \varphi, \\ \tilde{l} &= (x - x_0^t) \cos \varphi + (y - y_0^t) \sin \varphi, \\ \tilde{\varphi} &= \varphi. \end{aligned}$$

Если точка z с координатами (H, l, φ) достаточно близка к z_0 , то $z^t = S_t z_0$ близка к $z_0^t = (0, 0, \varphi_0^t)$. Обозначим $(\tilde{H}_t, \tilde{l}_t, \tilde{\varphi}_t)$ координаты z^t . Они являются функциями от

$(\tilde{H}, \tilde{l}, \tilde{\varphi})$. Легко видеть, что связь $(\tilde{H}_t, \tilde{l}_t, \tilde{\varphi}_t)$ с (H, l, φ) имеет вид

$$\begin{aligned} (\tilde{H}_t, \varphi_t) &= T(H, \varphi), \\ \tilde{l}_t &= F(H, \varphi) + t + l, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где $F(H, \varphi)$ не зависит от l и t , а T — преобразование, высекаемое потоком S'_t на поверхность Σ , выраженное в локальных координатах: $(H(x_0), \varphi)$ в окрестности $x_0 = (x_0, y_0, \varphi_0)$ и $(H(x_0^t), \varphi)$ в окрестности $x_0^t = (x_0^t, y_0^t, \varphi_0^t)$. Так как мера $dm = dH d\varphi$ инварианта относительно T , то

$$\frac{D(x_0^t, y_0^t, \varphi_0^t)}{D(x_0, y_0, \varphi_0)} = \frac{D(x^t, y^t, \varphi^t)}{D(\tilde{H}, \tilde{l}, \tilde{\varphi})} \Big|_{x_0^t} \cdot (-1) \frac{D(\tilde{H}, \tilde{\varphi}, \tilde{l})}{D(H, \varphi, l)} \Big|_{x_0} \cdot (-1) \frac{D(H, \varphi, l)}{D(x, y, \varphi)} \Big|_{x_0} = 1.$$

В случае нескольких пересечений поверхности Σ определитель (6.12) есть произведение нескольких определителей, каждый из которых равен единице. ■

Пусть $\{\Gamma_\eta\}_{\eta \in E \cap [a, b]}$ — семейство инвариантных кривых в Z , $\Gamma_\eta = \mathcal{F}_\eta \cap \Sigma$.

Лемма 6.1.

$$M\left(\bigcup_{\eta \in E \cap [a, b]} \mathcal{F}_\eta\right) = \left| \int_{E \cap [a, b]} \mathcal{P}(\eta) dQ(\eta) - Q(\eta) d\mathcal{P}(\eta) \right|. \quad (6.14)$$

Прежде чем доказывать непосредственно лемму 6.1, введем еще две функции, связанные с семейством инвариантных кривых:

$$\mathcal{Q}(\eta) = \frac{D(H_j(x, \xi, \eta), \varphi_j(\xi, \eta))}{D(\xi, \eta)}, \quad (6.15)$$

$$l(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{n-1} (e_j(\xi, \eta), x_{j+1}(\xi, \eta) - x_j(\xi, \eta)). \quad (6.16)$$

Независимость правой части (6.15) от x следует из равенства (1.4), независимость от j при $\eta \in E \cap [a, b]$ следует из (6.2) и того факта, что преобразование T сохраняет меру $dm =$

$= dH(x_0) d\varphi$. Отсюда же следуют равенства

$$\frac{D(H_0(x, \xi, \eta), \varphi_0(\xi, \eta))}{D(\xi, \eta)} = \frac{D(H_\eta(x, \xi, \eta), \varphi_\eta(\xi, \eta))}{D(\xi, \eta)} = \frac{D(H_0(x, \xi + \eta, \eta), \varphi_0(\xi + \eta, \eta))}{D(\xi, \eta)},$$

которые доказывают независимость правой части (6.15) от ξ при $\eta \in E \cap [a, b]$, так как предположили, что E состоит из иррациональных чисел.

Отметим, что $l(\xi, \eta) > 0$ и $\mathcal{Q}(\eta)$ сохраняет знак.

Лемма 6.2. Имеют место формулы:

$$\frac{d}{d\eta} \mathcal{P}(\eta) = -\mathcal{Q}(\eta) \quad \text{при } \eta \in E \cap [a, b], \quad (6.17)$$

$$\frac{d}{d\eta} \mathcal{Q}(\eta) = \eta \mathcal{Q}(\eta) \quad \text{при } \eta \in E \cap [a, b], \quad (6.18)$$

$$M\left(\bigcup_{\eta \in E \cap [a, b]} \mathcal{P}_\eta\right) = \left| \iint_{\Pi_{a, b}^E} l(\xi, \eta) \mathcal{Q}(\eta) d\xi d\eta \right|, \quad (6.19)$$

$$\int_0^1 l(\xi, \eta) d\xi = \mathcal{Q}(\eta) + \eta \mathcal{P}(\eta) \quad \text{при } \eta \in E \cap [a, b]. \quad (6.20)$$

Заметим, что из совокупности формул (6.17)–(6.20) следует утверждение леммы 6.1, поэтому достаточно доказать лемму 6.2.

Доказательство леммы 6.2. Формула (6.17) получается из выражения (6.4) дифференцированием по параметру η и интегрированием по частям в члене, содержащем $D_\xi D_\eta \varphi_j$. Для доказательства соотношения (6.18) используем представление (6.10) для $\mathcal{Q}(\eta)$. Дифференцируя по η , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{Q}}{d\eta} &= \sum_{j=0}^{n-2} (n_j, x_{j+1} - x_j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} + (n_{n-1}, x_0 - x_{n-1}) \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \eta} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-2} \left(e_j, \tau_{j+1} \frac{\partial s_{j+1}}{\partial \eta} - \tau_j \frac{\partial s_j}{\partial \eta} \right) + \left(e_{n-1}, \tau_0 \frac{\partial s_0}{\partial \eta} - \tau_{n-1} \frac{\partial s_{n-1}}{\partial \eta} \right) - \\ &\quad - \int_{\xi-\eta}^{\xi} H_{n-1}(x_0(\xi, \eta), \xi', \eta) D_\xi D_\eta \varphi_{n-1}(\xi', \eta) d\xi' - \\ &\quad - \int_{\xi-\eta}^{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} H_{n-1}(x_0(\xi, \eta), \xi', \eta) D_\xi \varphi_{n-1}(\xi', \eta) d\xi'. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Члены в первой сумме (6.21) равны нулю, так как $n_j \perp (x_{j+1} - x_j)$. Вычислим производную по η в последнем члене, используя тождество (1.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} H_{n-1}(x_0(\xi, \eta), \xi', \eta) &= \left(\tau_0(\xi_0, \eta) \frac{\partial s_0}{\partial \eta}, n_{n-1}(\xi', \eta) \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta'} H_{n-1}(x_0(\xi_0, \eta), \xi', \eta') \Big|_{\eta'=\eta}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Интегрируя по ξ' , получаем выражение для последнего члена в (6.21):

$$\begin{aligned} - \int_{\xi-\eta}^{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} H_{n-1}(x_0(\xi, \eta), \xi', \eta) D_{\xi'} \varphi_{n-1}(\xi', \eta) d\xi' &= - \left(\tau_0(\xi, \eta) \frac{\partial s_0}{\partial \eta}, e_{n-1}(\xi, \eta) - \right. \\ &\left. - e_{n-1}(\xi - \eta, \eta) \right) - \int_{\xi-\eta}^{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta'} H_{n-1}(x_0(\xi, \eta), \xi', \eta') \Big|_{\eta'=\eta} \frac{d\varphi_{n-1}(\xi', \eta)}{d\xi'} d\xi'. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Интегрируем по частям предпоследний член в (6.21):

$$\begin{aligned} - \int_{\xi-\eta}^{\xi} H_{n-1}(x_0(\xi, \eta), \xi', \eta) D_{\xi'} D_{\eta} \varphi_{n-1}(\xi', \eta) d\xi' &= \\ = - H_{n-1}(x_0(\xi, \eta), \xi, \eta) D_{\eta} \varphi_{n-1}(\xi, \eta) + \int_{\xi-\eta}^{\xi} D_{\xi'} H_{n-1}(x_0(\xi, \eta), \xi', \eta) D_{\eta} \varphi_{n-1}(\xi', \eta) d\xi'. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Подставляя в (6.21) выражения (6.23) и (6.24), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{d\eta} &= (n_{n-1}, x_0 - x_{n-1}) \frac{d\varphi_{n-1}}{d\eta} + \sum_{j=0}^{n-2} \left(e_j, \tau_{j+1} \frac{ds_{j+1}}{d\eta} - \tau_j \frac{ds_j}{d\eta} \right) + \\ &+ \left(e_{n+1}, \tau_0 \frac{ds_0}{d\eta} - \tau_{n-1} \frac{ds_{n-1}}{d\eta} \right) - \left(\tau_0 \frac{ds_0}{d\eta}, e_{n-1}(\xi, \eta) - \right. \\ &\left. - e_{n-1}(\xi - \eta, \eta) \right) - H_{n-1}(x_0(\xi, \eta), \xi, \eta) \frac{d\varphi_{n-1}}{d\eta} - \int_{\xi-\eta}^{\xi} \mathcal{Q}(\eta) d\xi'. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Все члены в (6.25), кроме последнего, в силу разных причин сокращаются. Сумма первого и предпоследнего равна нулю вследствие тождества (1.3). Сумма членов, кроме первого и двух последних, равна

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(\mathbf{e}_j, \tau_{j+1} \frac{ds_{j+1}}{d\eta} - \tau_j \frac{ds_j}{d\eta} \right) + (\tau_0, \mathbf{e}_{-1}) \frac{ds_0}{d\eta} -$$

$$- (\tau_{n-1}, \mathbf{e}_{n-1}) \frac{ds_{n-1}}{d\eta} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{ds_j}{d\eta} (\tau_j, \mathbf{e}_{j-1} - \mathbf{e}_j) = 0,$$

так как вектор $\mathbf{e}_{j-1} - \mathbf{e}_j$ ортогонален границе в точке \mathbf{x}_j в силу закона отражения.

Перейдем к доказательству формулы (6.19). Инвариантный тор \mathcal{T}_η разрезается поверхностью Σ на n частей, каждая из которых гомеоморфна $S^1 \times [0, 1]$. В соответствии с этим все множество $\bigcup_{\eta \in \mathbb{E} \cap [a, b]} \mathcal{T}_\eta$ разбивается на n частей, которые обозначим \mathcal{T}_j , $0 \leq j \leq n-1$. Множество \mathcal{T}_j состоит из всех точек $z \in Z$, имеющих вид $\mathcal{S}_{t_0} z_0$, где $z_0 \in \Sigma_j(\Pi_{\alpha, \beta}^{\mathbb{E}}) \subset \Sigma$, $t_0 \geq 0$ и $\mathcal{S}_t z_0 \notin \Sigma$ при всех $t \in]0, t_0]$. Таким образом, каждому $z \in \mathcal{T}_j$ соответствует $z_0 = z_0(z) \in \Sigma$, такое, что $z = \mathcal{S}_{t_0} z_0$. Ясно, что

$$M\left(\bigcup_{\eta} \mathcal{T}_\eta\right) = \sum_{j=0}^{n-1} M(\mathcal{T}_j). \quad (6.26)$$

Для вычисления $M(\mathcal{T}_j)$ воспользуемся координатной системой (H, l, φ) , использованной при доказательстве теоремы 1. Так как $D(H, l, \varphi)/D(x, y, \varphi) = 1$,

$$M(\mathcal{T}_j) = \iiint_{\mathcal{T}_j} dH d\varphi dl = \iint_{\Pi_{\alpha, \beta}^{\mathbb{E}}} \int_{(\mathbf{x}_j(\xi, \eta), \mathbf{e}_j(\xi, \eta))}^{(\mathbf{x}_{j+1}(\xi, \eta), \mathbf{e}_j(\xi, \eta))} dl =$$

$$= \iint_{\Pi_{\alpha, \beta}^{\mathbb{E}}} |\mathbf{x}_{j+1}(\xi, \eta) - \mathbf{x}_j(\xi, \eta)| \left| \frac{D(H, \varphi)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta. \quad (6.27)$$

Складывая равенства (6.27), получаем формулу (6.19).

Перейдем к доказательству формулы (6.20). Из выражений (6.16) и (6.9) следует, что

$$l(\xi, \eta) = Q(\eta) + \int_{\xi-\eta}^{\xi} H_{n-1}(x^*, \xi', \eta) d\varphi_{n-1}(\xi', \eta) + \\ + (e_{n-1}(\xi, \eta), x_n(\xi, \eta) - x^*) - (e_{n-1}(\xi-\eta, \eta), x_n(\xi-\eta, \eta) - x^*). \quad (6.28)$$

Интегрируя (6.28) по ξ , имеем

$$\int_0^1 l(\xi, \eta) d\xi = Q(\eta) + \int_0^1 \left[\int_{\xi-\eta}^{\xi} H_{n-1}(x^*, \xi', \eta) d\varphi_{n-1}(\xi', \eta) \right] d\xi. \quad (6.29)$$

Меняя порядок интегрирования в двойном интеграле в правой части (6.29), получаем, что этот интеграл равен

$$\int_0^1 H_{n-1}(x^*, \xi', \eta) d\varphi_{n-1}(\xi', \eta) \int_{\xi'}^{\xi'+\eta} d\xi = \eta \rho(\eta). \quad (6.30)$$

Формула (6.20) следует из (6.29) и (6.30). ■

КВАЗИМОДЫ И СПЕКТР

Главным объектом, рассматриваемым в этой книге, является спектр задачи Дирихле для оператора Лапласа в выпуклой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. В следующей главе будут построены так называемые квазимоды, т.е. "приближенные выражения" для собственных функций этой задачи. Квазимоды в определенном смысле аппроксимируют спектр оператора Лапласа. В настоящей же главе будут сформулированы основные определения, связанные с квазимодами, и выяснены отношения, связывающие квазимоды со спектром.

§ 7. Оператор Лапласа

Пусть Ω — произвольная ограниченная область на плоскости с гладкой границей $\partial\Omega$. Введем некоторые обозначения:
 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ — замыкание области Ω ;

$C(\Omega)$ — пространство всех непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций, принимающих комплексные значения;

$C_0^2(\Omega)$ — пространство всех непрерывных функций на $\bar{\Omega}$, равных нулю на $\partial\Omega$, обладающих непрерывными производными до второго порядка включительно во внутренних точках Ω , причем эти производные допускают непрерывное продолжение на $\bar{\Omega}$;

$L_2(\Omega)$ — гильбертово пространство комплекснозначных измеримых функций на Ω , квадрат модуля которых интегрируем по мере Лебега на Ω ; скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ задается формулой

$$(u, v) = \iint_{\Omega} u(x, y) \overline{v(x, y)} dx dy; \quad (7.1)$$

$W_2^2(\Omega)$ - банахово пространство, состоящее из всех элементов $L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные (по Соболеву) всех видов до второго порядка включительно, также принадлежащие $L_2(\Omega)$; норма в $W_2^2(\Omega)$ определяется равенством

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} = \left[\iint_{\Omega} \left(|u|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 + \sum_{i,k=1}^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right|^2 \right) dx dy \right]^{1/2}, \quad (7.2)$$

$$(x_1, x_2) = (x, y);$$

$W_{2,0}^2(\Omega)$ - подпространство в $W_2^2(\Omega)$, являющееся замыканием в норме $W_2^2(\Omega)$ множества $C_0^2(\Omega)$.

Определим оператор Лапласа Δ в $L_2(\Omega)$ следующим образом. Областью определения оператора Δ является $W_{2,0}^2(\Omega)$. Если $u \in W_{2,0}^2(\Omega)$, то

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u. \quad (7.3)$$

Лемма 7.1. Оператор Δ является самосопряженным отрицательно определенным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$.

Доказательство этой леммы можно извлечь, например, из результатов книги [12, гл. III, § 9].

Из теорем вложения Соболева следует, что оператор $-\Delta$ имеет бесконечную последовательность положительных собственных чисел, стремящуюся к бесконечности. Соответствующие им собственные функции, т.е. функции $u_k \in W_{2,0}^2(\Omega)$, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta u_k + \lambda_k u_k = 0 \quad (7.4)$$

и условию нормировки

$$\|u_k\|_{L_2(\Omega)} = 1, \quad (7.5)$$

образуют полную ортогональную систему.

Пусть $N(\lambda)$ обозначает число собственных чисел (с учетом кратности) оператора $-\Delta$, попавших в интервал $]0, \lambda[$. Широко известна формула Г. Вейля [46, 47]: при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$N(\lambda) = \frac{|\Omega|}{4\pi} \lambda + o(\sqrt{\lambda} \log \lambda). \quad (7.6)$$

Здесь $|\Omega|$ - площадь области Ω .

§ 8. Квазимоды и асимптотика собственных чисел

В этом параграфе буква A обозначает произвольный самосопряженный оператор в счетномерном гильбертовом пространстве \mathcal{H} , норму и скалярное произведение в котором будем обозначать соответственно символами $\|\cdot\|$, (\cdot, \cdot) . Область определения оператора A обозначим через $\mathcal{D}(A)$. В дальнейших приложениях в качестве A будем брать оператор Лапласа в выпуклой области Ω со знаком минус: $-\Delta$. В этом случае $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ и $\mathcal{D}(A) = W_{2,0}^2(\Omega)$. Следующее ниже определение приспособлено для эллиптических операторов на двумерных многообразиях и областях. Для многообразий и областей размерности n двумерную целочисленную решетку следует заменить n -мерной, и показатель -2 в (8.4) заменить на $-n$. Будем рассматривать тройки вида

$$\{ \Lambda, \{ U_{pq} \}_{(p,q) \in \Lambda}, \{ \lambda_{pq} \}_{(p,q) \in \Lambda} \}, \quad (8.1)$$

где $\Lambda = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ - бесконечное подмножество двумерной целочисленной решетки; $\{ U_{pq} \}_{(p,q) \in \Lambda}$ - семейство элементов из $\mathcal{D}(A)$, параметризованное точками $(p,q) \in \Lambda$; $\{ \lambda_{pq} \}_{(p,q) \in \Lambda}$ - семейство вещественных чисел.

Пусть ν - положительное целое число. Семейством квазимод порядка ν для оператора A будем называть тройку вида (8.1), если существует постоянная $c > 0$, такая, что выполняются неравенства

$$\| (A - \lambda_{pq}) U_{pq} \| < c (\sqrt{p^2 + q^2})^{-\nu}, \quad (8.2)$$

$$\| U_{pq} \|^{-1} < c \quad (8.3)$$

для всех $(p,q) \in \Lambda$ и

$$| (U_{p_1 q_1}, U_{p_2 q_2}) | < c \left(\min_{i \in \{1,2\}} \sqrt{p_i^2 + q_i^2} \right)^{-2} \quad (8.4)$$

для всех $(p_1, q_1) \in \Lambda$, $(p_2, q_2) \in \Lambda$, $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$. Элементы U_{pq} , входящие в семейство квазимод, в согласии с терминологией, предложенной В.И. Арнольдом [6], будем называть квазимодами. В следующей главе будут построены семейства квазимод для оператора Лапласа в выпуклой области. Эти построения опираются на результаты первой главы. В оставшейся части данного параграфа будет разъяснено, какое отношение квазимоды и числа λ_{pq} имеют к собственным векторам и собственным числам оператора A .

Теорема 9. Пусть самосопряженный оператор A имеет чисто точечный спектр и $\{\Lambda, \{U_{pq}\}_{(p,q) \in \Lambda}, \{\lambda_{pq}\}_{(p,q) \in \Lambda}\}$ — семейство квазимод порядка ν для оператора A , c — постоянная, участвующая в неравенствах (8.2)–(8.4) для данного семейства квазимод. Тогда:

а) любой интервал на вещественной оси вида

$$\left] \lambda_{pq} - c^2(\sqrt{p^2 + q^2})^{-\nu}, \lambda_{pq} + c^2(\sqrt{p^2 + q^2})^{-\nu} \right[$$

содержит по крайней мере одно собственное число оператора A ;

б) для любых чисел $\nu_1 \in [0, \nu]$ и $c_1 > 0$

$$\| P_{\Delta_{pq}} U_{pq} - U_{pq} \| < \frac{c}{c_1} (\sqrt{p^2 + q^2})^{-\nu - \nu_1},$$

где $P_{\Delta_{pq}}$ — проектор в \mathcal{H} на подпространство, натянутое на собственные векторы оператора A , собственные числа которых принадлежат интервалу

$$\Delta_{pq} = \left] \lambda_{pq} - c_1(\sqrt{p^2 + q^2})^{-\nu_1}, \lambda_{pq} + c_1(\sqrt{p^2 + q^2})^{-\nu_1} \right[. \quad (8.5)$$

Доказательство (см. также [7, 13, 20, 29, 30]).

Пусть d_λ — расстояние от числа λ до спектра оператора A , $R_\lambda = (\lambda E - A)^{-1}$ — резольвента оператора A , φ_k и λ_k^* — собственные векторы и собственные числа оператора A . Утверждение

а) теоремы сразу же вытекает из неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_{\lambda_{pq}}} &= \| R_{\lambda_{pq}} \| \geq \frac{\| R_{\lambda_{pq}} (\lambda_{pq} - A) U_{pq} \|}{\| (\lambda_{pq} - A) U_{pq} \|} = \\ &= \frac{\| U_{pq} \|}{\| (\lambda_{pq} - A) U_{pq} \|} > \frac{1}{c^2} (\sqrt{p^2 + q^2})^\nu. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Утверждение б) есть следствие из цепочки неравенств

$$\begin{aligned}
 & c^2 (\sqrt{p^2 + q^2})^{-2\nu} > \| (A - \lambda_{pq}) u_{pq} \|^2 = \\
 & = \sum_k |\lambda_k^* - \lambda_{pq}|^2 | (u_{pq}, \varphi_k) |^2 \geq \sum_{\lambda_k^* \notin \Delta_{pq}} |\lambda_k^* - \lambda_{pq}|^2 | (u_{pq}, \varphi_k) |^2 \geq \\
 & \geq c_1^2 (\sqrt{p^2 + q^2})^{-2\nu_1} \| P_{\Delta_{pq}} u_{pq} - u_{pq} \|^2. \quad \blacksquare \quad (8.7)
 \end{aligned}$$

Из доказанной теоремы следует, что не только истинные собственные числа оператора A аппроксимируются числами последовательности $\{\lambda_{pq}\}$, но и векторы U_{pq} мало отличаются от $P_{\Delta_{pq}} U_{pq}$. В случае оператора Лапласа в ограниченной области $P_{\Delta_{pq}} U_{pq}$ есть линейная комбинация конечного числа собственных элементов, собственные числа которых попали в малый интервал Δ_{pq} . Если в интервале Δ_{pq} содержится лишь одно собственное число оператора A , то U_{pq} близко к собственному вектору A . В противном случае ничего больше того, что сказано, утверждать нельзя. Даже если квазимоды построены на основании естественных-геометро-оптических соображений, то, как показано В.И. Арнольдом [6], они могут аппроксимировать линейную комбинацию собственных функций, или, что то же самое, асимптотика некоторых последовательностей собственных функций может иметь вид линейной комбинации нескольких таких "естественных" квазимод с коэффициентами, среди которых нет стремящихся к нулю.

Далее будем иметь дело с семействами квазимод, удовлетворяющим двум дополнительным условиям:

Ка) существует постоянная $C_2 > 1$, такая, что для всех $(p, q) \in \Lambda$

$$C_2^{-1} (p^2 + q^2) \leq \lambda_{pq} \leq C_2 (p^2 + q^2);$$

Кб) существует постоянная $C_3 > 0$, такая, что для любого $\lambda > 0$ число точек $(p, q) \in \Lambda$, для которых $\lambda_{pq} \in]\lambda, \lambda + \sqrt{\lambda}]$, не превосходит $C_3 \sqrt{\lambda}$.

Пусть $\nu \geq 4$. Выберем и фиксируем в определении интервала

Δ_{pq} (см. формулу (8.5)) числа $c_1 > c^2$ и $\nu_1 \in [2, \nu - 2]$. Тогда любой интервал Δ_{pq} будет содержать по крайней мере одно собственное число оператора A . Интервалы Δ_{pq} могут пересекаться друг с другом. Объединение всех интервалов Δ_{pq} состоит, вообще говоря, из более крупных попарно непересекающихся интервалов, которые обозначим Δ_i , $i=1, 2, \dots$, нумеруя их в порядке следования на вещественной оси. Центр интервала Δ_i обозначим λ_i .

Лемма 8.1. Число интервалов Δ_i бесконечно, их длины удовлетворяют оценке

$$|\Delta_i| \leq \text{const} \cdot (\sqrt{\lambda_i})^{-\nu_1+1}. \quad (8.8)$$

Число $N^{**}(\Delta_i)$ интервалов Δ_{pq} , составивших один интервал Δ_i , конечно и удовлетворяет оценке

$$N^{**}(\Delta_i) \leq \text{const} \cdot \sqrt{\lambda_i}, \quad (8.9)$$

const в соотношениях (8.8) и (8.9) зависят только от ν, ν_1, c и c_i , $i=1, 2, 3, \dots$

Доказательство. Если бы число интервалов Δ_i было конечно, то среди них в силу бесконечности Λ и условия Ка) имелся бы полубесконечный интервал $]R_0, +\infty[$, покрываемый интервалами Δ_{pq} . Пусть $R > R_0$. Рассмотрим интервалы Δ_{pq} , для которых $\lambda_{pq} \in [R_0, R - c_1 c_2^{\nu_1/2} R^{-\nu_1/2}]$. Они покрывают интервал $]R_0, R]$. Поэтому

$$R - R_0 \leq \sum_{\lambda_{pq} \in [R_0, R - c_1 c_2^{\nu_1/2} R^{-\nu_1/2}]} 2c_1(p^2 + q^2)^{-\nu_1/2} \leq \text{const} \cdot \log R. \quad (8.10)$$

Сумма в (8.10) ограничена при $\nu_1 > 2$ и растет с увеличением R не быстрее $\log R$ при $\nu_1 = 2$ в силу условия Ка). При достаточно больших R в неравенстве (8.10) приходим к противоречию. Это доказывает бесконечность числа интервалов Δ_i и конечность каждого Δ_i .

Пусть $\Delta_i =]\alpha_i, \beta_i[$. Во всяком случае $\alpha_i \geq -c_1$, $\beta_i \leq 2\lambda_i + c_1$, поэтому

$$\begin{aligned}
|\Delta_i| &\leq \sum_{|\lambda_{pq} - \lambda_i| < \frac{1}{2}|\Delta_i|} 2c_1(\sqrt{p^2 + q^2})^{-\nu_1} \leq \\
&\leq \sum_{p^2 + q^2 \leq c_2(2\lambda_i + c_1)} 2c_1(\sqrt{p^2 + q^2})^{-\nu_1} \leq \text{const} \cdot (|\log \lambda_i| + 1). \quad (8.11)
\end{aligned}$$

Из условия Кб) и соотношения (8.11) следует, что $N^{**}(\Delta_i) \leq c_3 \sqrt{\lambda_i}$ при достаточно больших λ_i , т.е. выполняется (8.9). Оценим $|\Delta_i|$ еще раз, учитывая (8.9) и (8.11):

$$\begin{aligned}
|\Delta_i| &= \sum_{|\lambda_{pq} - \lambda_i| < \frac{1}{2}|\Delta_i|} 2c_1(\sqrt{p^2 + q^2})^{-\nu_1} \leq \\
&\leq \frac{\lambda_i - \text{const} \cdot (|\log \lambda_i| + 1)}{c_2} \leq p^2 + q^2 \leq \frac{\lambda_i + \text{const} \cdot (|\log \lambda_i| + 1)}{c_2^{-1}} \leq \\
&\leq \text{const} \cdot \lambda_i^{-\nu_1/2} N^{**}(\Delta_i) \leq \text{const} \cdot \lambda_i^{-\nu_1/2 + 1/2}. \quad (8.12)
\end{aligned}$$

Последнее неравенство и есть требуемая лемма (8.8). ■

Пусть $N^{**}(\lambda)$ обозначает число пар $(p, q) \in \Lambda$, для которых $\lambda_{pq} \in]0, \lambda[$. Из свойства Кб) следует оценка

$$N^{**}(\lambda) \leq \text{const} \cdot \lambda. \quad (8.13)$$

Обозначим P_{Δ_i} проектор в \mathcal{H} на часть спектра оператора A , попавшую в интервал Δ_i , $N^*(\Delta_i)$ — размерность подпространства, натянутого на функции $P_{\Delta_i} U_{pq}$, где (p, q) пробегает то конечное множество значений для которых $\Delta_{pq} \subset \Delta_i$. Определим

$$N^*(\lambda) = \sum_{0 < \lambda_i < \lambda} N^*(\Delta_i). \quad (8.14)$$

Теорема 10. Пусть семейство квазимод порядка $\nu \geq 4$ удовлетворяет условиям Ка) и Кб). Тогда при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$N^*(\lambda) = N^{**}(\lambda) + o(\sqrt{\lambda}). \quad (8.15)$$

Доказательство. Верна формула

$$N^{**}(\lambda) = \sum_{0 < \lambda_i < \lambda} N^{**}(\Delta_i) + o(\sqrt{\lambda}). \quad (8.16)$$

Действительно, если λ не принадлежит ни одному из интервалов Δ_i , то погрешность в (8.16) в точности равна нулю. Если же $\lambda_i \in \Delta_{i_0}$, то погрешность не превышает $N^{**}(\Delta_{i_0}) \leq \text{const} \cdot \sqrt{\lambda}$.

Утверждение теоремы будет следовать из (8.16), если мы покажем, что для достаточно больших номеров i верно равенство $N^{**}(\Delta_i) = N^*(\Delta_i)$. Последнее в силу оценок (8.9), (8.3), (8.4), утверждения б) теоремы 9 и свойства Ка) получается из следующей леммы, если ее применить к проектору P_{Δ_i} и набору векторов $\{U_{pq} / \|U_{pq}\|\}_{\lambda_{pq} \in \Delta_i}$.

Лемма 8.2. Пусть P — ортогональный проектор в гильбертовом пространстве, $u_i, i=1, 2, \dots, N$, — нормированные векторы, L — подпространство, натянутое на векторы $Pu_i, i=1, 2, \dots, N$. Если выполнены оценки

$$|(u_i, u_k)| < \frac{1}{2N}, \quad i, k=1, 2, \dots, N, \quad i \neq k,$$

$$\|Pu_i - u_i\| < \frac{1}{2N}, \quad i=1, \dots, N,$$

то

$$\dim L = N.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что определитель матрицы $\{(Pu_i, Pu_k)\}_{i,k=1}^N$ отличен от нуля. Эта матрица отличается от единичной матрицы на матрицу $B = \{(Pu_i, u_k) - \delta_{ik}\}_{i,k=1}^N$, где δ_{ik} — символ Кронекера. Элементы матрицы B в силу условий леммы по абсолютной величине меньше $1/N$. Отсюда следует, что все собственные числа матрицы B по абсолютной величине меньше 1. Действительно, если λ — собственное число B , b_{i_0} — компонента соответствующего собственного вектора $\{b_i\}_{i=1}^N$, имеющая максимальную абсолютную величину, то

$$|\lambda| \cdot |b_{i_0}| \leq \sum_{k=1}^N |(Pu_{i_0}, u_k) - \delta_{ik}| \cdot |b_k| < N \frac{1}{N} |b_{i_0}|,$$

откуда следует неравенство $|\lambda| < 1$. Поэтому определитель матрицы $\{(Pu_i, Pu_k)\}_{i,k=1}^N$ не равен нулю. ■

§ 9. Условие квантования для семейства инвариантных торов. Определение множества Λ

Как уже говорилось, следующая глава содержит построение семейств квазимод в смысле определения, данного в предыдущем параграфе, для оператора Лапласа в выпуклой области Ω . Основной для этих построений служат семейства инвариантных торов в фазовом пространстве потока, существование которых доказывалось в первой главе. В § 6 с семейством инвариантных торов для выпуклого бильярда связывалась пара гладких функций $\mathcal{P}(\eta)$ и $Q(\eta)$, где параметр η пробегает множество $E_{\sigma, \sqrt{E}} \cap [a, b]$. В терминах этих функций выпишем сейчас так называемое "условие квантования", из которого определится множество $\Lambda \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, пробегаемое парой целых чисел (p, q) , нумерующей квазимоды, и определится главный член асимптотики собственных чисел λ_{pq} .

Будем использовать следующие свойства функций $\mathcal{P}(\eta)$, $Q(\eta)$. (Далее в этом параграфе буквы d_i , $1 \leq i \leq 7$, обозначают положительные постоянные.)

$\mathcal{P}Q1$) Функции $\mathcal{P}(\eta)$, $Q(\eta)$ принимают вещественные значения и заданы на замкнутом множестве $E \cap [a, b]$.

$\mathcal{P}Q2$) Множество E получается удалением из $[a, b]$ счетного множества открытых попарно непересекающихся интервалов $\tilde{\Delta}_i$, причем выполнены оценки: для каждого $t > 0$ число $M(t)$ интервалов $\tilde{\Delta}_i$, длины которых больше t , удовлетворяет неравенству $M(t) < d_1 t^{-2/\sigma}$; сумма длин $S(t)$ остальных интервалов удовлетворяет неравенству $S(t) < d_1 t^{(\sigma-1)/(\sigma+1)}$, постоянная σ удовлетворяет неравенству $\sigma > 2$.

$\mathcal{P}Q3$) Имеет место оценка $d_2 \leq \mathcal{P}^2(\eta) + Q^2(\eta) \leq d_3$.

$\mathcal{P}Q4$) Существует непрерывная ветвь функции $\Theta(\eta) = \text{Arctg}(Q(\eta)/\mathcal{P}(\eta))$, строго монотонно зависящая от η , такая, что $\Theta'(\eta) \neq 0$ и для некоторого $c \in \mathbb{R}^1$ имеет место $\Theta(E) \subset [c, 2\pi + c]$.

Определенные в § 6 функции $\mathcal{P}(\eta)$ и $Q(\eta)$ обладают свойствами $\mathcal{P}Q1$) и $\mathcal{P}Q3$). Свойство $\mathcal{P}Q1$) следует из определения этих функций. Условие $\mathcal{P}Q3$) выполняется, так как $\mathcal{P}(\eta) \neq 0$ (см. с. 57). В качестве множества E возьмем множество $E_{\sigma, \sqrt{E}} \cap [a, b]$.

Именно с такими числами вращения в § 5 рассматривались семейства инвариантных кривых и доказывалось существование этих семейств для преобразования $T: \Sigma \rightarrow E$. Убедимся в справедливости $\mathcal{PQ2}$ при условии $\sigma > 2$.

Лемма 9.1. Для множества $E = E_{\sigma, \sqrt{\varepsilon}} \cap [\alpha, b]$ имеют место оценки

$$M(t) \leq \text{const} \cdot (\sqrt{\varepsilon})^{\frac{2}{\sigma}} t^{-\frac{2}{\sigma}}, \quad (9.1)$$

$$S(t) \leq \text{const} \cdot (\sqrt{\varepsilon})^{\frac{2}{\sigma-1}} t^{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}}, \quad (9.2)$$

где const зависит только от $[\alpha, b]$ и σ .

Доказательство. Множество $[\alpha, b] \setminus E$, если интервал $[\alpha, b]$ не слишком мал по сравнению с $\sqrt{\varepsilon}$, состоит из счетного числа открытых попарно не пересекающихся интервалов $\tilde{\Delta}_i$, каждый из которых составлен из интервалов $\tilde{\Delta}_{m,n}$, определенных формулой (5.6). Число интервалов $\tilde{\Delta}_{m,n}$ с фиксированным n , содержащихся в $\tilde{\Delta}_i$, не превосходит $[n|\tilde{\Delta}_i|] + 1$ (здесь $[\cdot]$ обозначает целую часть). Поэтому

$$\begin{aligned} |\tilde{\Delta}_i| &\leq \sum_{\tilde{\Delta}_{m,n} \subset \tilde{\Delta}_i} |\tilde{\Delta}_{m,n}| \leq \sum_{[n|\tilde{\Delta}_i|] > 0} \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{n^{\sigma+1}} [n|\tilde{\Delta}_i|] + \\ &+ \sum_{n \geq n_i} \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{n^{\sigma+1}} \leq \text{const} \cdot \sqrt{\varepsilon} (|\tilde{\Delta}_i|^{\sigma} + n_i^{-\sigma}). \end{aligned} \quad (9.3)$$

В соотношениях (9.3) символом n_i обозначено наименьшее n , для которого $\tilde{\Delta}_{m,n} \subset \tilde{\Delta}_i$. Так как $\sigma > 1$, то из (9.3) следует оценка

$$n_i \leq \text{const} \cdot \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{|\tilde{\Delta}_i|} \right)^{1/\sigma}. \quad (9.4)$$

Обозначим n_{\max} максимальное число n_i для интервалов $\tilde{\Delta}_i$ с $|\tilde{\Delta}_i| > t$. Число $M(t)$ не превосходит числа всех интервалов $\tilde{\Delta}_{m,n}$ с $n \leq n_{\max}$. В силу неравенства (9.4)

$$\begin{aligned} M(t) &\leq n_{\max} ([n_{\max}(b-a)] + 1) \leq \text{const} \cdot n_{\max}^2 \leq \\ &\leq \text{const} \cdot (\sqrt{\varepsilon})^{2/\sigma} t^{-2/\sigma}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$S(t) = \sum_{|\tilde{\Delta}_i| \leq t} |\tilde{\Delta}_i| \leq \sum_{|\tilde{\Delta}_{m,n}| \leq t} |\tilde{\Delta}_{m,n}| \leq \\ \leq 2\sqrt{\varepsilon} \sum_{n \geq n_{\min}} ([n(b-a)] + 1) n^{-\sigma-1} \leq \text{const} \cdot \sqrt{\varepsilon} n_{\min}^{-\sigma+1}. \quad (9.5)$$

Здесь n_{\min} обозначает минимальное число n , такое, что при некотором m имеет место $\tilde{\Delta}_{m,n} \subset \bigcup_{|\Delta_i| \leq t} \tilde{\Delta}_i$. Если $\tilde{\Delta}_{m,n} \subset \tilde{\Delta}_i$ и $|\tilde{\Delta}_i| \leq t$, то

$$2\sqrt{\varepsilon} n_{\min}^{-\sigma-1} \leq 2\sqrt{\varepsilon} n^{-\sigma-1} = |\tilde{\Delta}_{m,n}| \leq |\tilde{\Delta}_i| \leq t.$$

Отсюда получаем, что

$$n_{\min} \geq \text{const} \cdot \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{t} \right)^{\frac{1}{\sigma+1}}. \quad (9.6)$$

Из неравенств (9.5) и (9.6) следует требуемая оценка для $S(t)$. ■

Рассмотрим условие $\mathcal{P}Q4)$. Для построенных в § 6 функций из утверждений леммы 6.2 следует формула

$$\Theta'(\eta) = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{P}^2 + \mathcal{Q}^2} \int_0^1 l(\xi, \eta) d\xi. \quad (9.7)$$

Определитель \mathcal{D} отличен от нуля и сохраняет на $E_{\sigma, \sqrt{\varepsilon}} \cap [\alpha, b]$ знак, так как E является диффеоморфизмом. Кроме того, всегда $l(\xi, \eta) > 0$. Из (9.7) следует, что $\Theta'(\eta)$ сохраняет знак при $\eta \in E = E_{\sigma, \sqrt{\varepsilon}} \cap [\alpha, b]$. Множество $E_{\sigma, \sqrt{\varepsilon}} \cap [\alpha, b]$, $\sigma > 2$, можно разбить на конечное число частей вида $E_{\sigma, \sqrt{\varepsilon}} \cap [\alpha_i, \beta_i]$, на которых все условия $\mathcal{P}Q1) - \mathcal{P}Q4)$ выполняются.

Дальнейшие построения и утверждения этого параграфа связаны с парой функций $\mathcal{P}(\eta)$ и $\mathcal{Q}(\eta)$, обладающих свойствами $\mathcal{P}Q1) - \mathcal{P}Q4)$, и опираются только на эти свойства.

Фиксируем число $\alpha \in]0, \frac{1}{2}\sigma - 1[$ и положительное число K . Множество $\Lambda \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, которое мы сейчас определим, зависит от α и K .

Определение множества Λ (условие квантования). Пара $(p, q) \in \Lambda$ тогда и только тогда, когда существует $\eta \in E$, для которого выполняется условие

$$|pQ(\eta) - qP(\eta)| < K(\sqrt{p^2 + q^2})^{-\alpha},$$

$$P(\eta) \neq 0, \quad p \neq 0, \quad \text{sign } p = \text{sign } P(\eta). \quad (9.8)$$

Для каждого $(p, q) \in \Lambda$ выберем и фиксируем некоторое $\eta_{pq} \in E$, такое, что при $\eta = \eta_{pq}$ выполняется (9.8). Главный член асимптотики собственных чисел $\lambda_{pq}^{(0)}$ по определению есть

$$\lambda_{pq}^{(0)} = 4\pi^2 \frac{p^2 + q^2}{P^2(\eta_{pq}) + Q^2(\eta_{pq})}. \quad (9.9)$$

Выражение (9.9), как показывают дальнейшая формула (12.8) и условие квантования (9.8), будет отличаться от последовательности λ_{pq} , аппроксимирующей собственные числа, на величину порядка $\sqrt{\lambda_{pq}}$.

Выясним геометрический смысл условия квантования. Для этого обратимся к случаю, когда Ω - круг с радиусом R_0 . Данному значению $\eta \in E$ отвечает в этом случае (см. § 6) каустика - концентрический круг с радиусом $R_0 |\cos \pi \eta|$. Число $P(\eta)$ есть длина каустики, $Q(\eta) = |AC| + |BC| - \widehat{AmB}$, где $|AC|$ и $|BC|$ - длины отрезков AC и BC , \widehat{AmB} - длина меньшего отрезка дуги каустики, заключенного между точками A и B (рис. 15). Введем "длину волны":

$$\{ \text{длина волны} \} = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_{pq}^{(0)}}}. \quad (9.10)$$

В этом случае из соотношений (9.8) и (9.9) (см. (9.22)) следует, что

$$\left| \frac{P}{\{ \text{длина волны} \}} - p \right| \leq \text{const} \cdot (\sqrt{p^2 + q^2})^{-\alpha}, \quad (9.11)$$

$$\left| \frac{Q}{\{ \text{длина волны} \}} - q \right| \leq \text{const} \cdot (\sqrt{p^2 + q^2})^{-\alpha}. \quad (9.12)$$

Неравенства (9.11) и (9.12) показывают, что на "базисных циклах" торов, образованных семействами лучей, укладывается приближительно целое число длин волн: $|p|$ длин волн на каустике и $|q|$ длин волн на втором базисном цикле (на \widehat{AmB} оптическая

длина пути берется со знаком минус). Следовательно, условие квантования (9.8) является приближенным аналогом условий квантования Келлера и Рубинова [43]. В отличие от ситуации, рассматриваемой ими, наше условие квантования не точное, а приближенное: с погрешностью, равной правой части (9.8). Это связано с разрывным характером множества E . Если бы мы потребовали точного выполнения условий квантования, то не смогли бы гарантировать существование даже одной точки, принадлежащей множеству Λ . Следующая ниже теорема II показывает, что при принятых условиях квантования (9.8) множество Λ имеет "положительную плотность" в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ при $p^2 + q^2 \rightarrow +\infty$. Из результатов первой главы следует, что разрывной характер множества E является правилом, а непрерывный - исключением.

Дальнейшие рассмотрения связаны с семейством квазимод $\{ \Lambda, \{ U_{pq} \}, \{ \lambda_{pq} \} \}$, для которого множество Λ построено по паре функций $\mathcal{P}(\eta), Q(\eta)$, удовлетворяющей условиям $\mathcal{P}Q1) - \mathcal{P}Q4)$, числам K и α . Кроме того, будем предполагать, что последовательность λ_{pq} удовлетворяет оценке

$$| \lambda_{pq} - \lambda_{pq}^{(0)} | \leq d_4 \sqrt{\lambda_{pq}^{(0)}}. \quad (9.13)$$

Семейство квазимод с такими Λ и $\{ \lambda_{pq} \}$ будем называть согласованным с парой функций $\mathcal{P}(\eta), Q(\eta)$.

Теорема II. Если семейство квазимод согласовано с парой функций $\mathcal{P}(\eta), Q(\eta)$, удовлетворяющей условиям $\mathcal{P}Q1) - \mathcal{P}Q4)$, то это семейство квазимод удовлетворяет условиям $\mathcal{K}a)$ и $\mathcal{K}b)$ из § 8 и справедлива оценка

$$N^{**}(\lambda) = \frac{1}{8\pi^2} \int_E | \mathcal{P}'(\eta)Q(\eta) - Q'(\eta)\mathcal{P}(\eta) | d\eta \cdot \lambda + O(\lambda^{1/2 + (\alpha+1)/\sigma}). \quad (9.14)$$

Доказательство. Из оценки (9.13), формулы (9.9) и условия $\mathcal{P}Q3$) следует, что семейство квазимод, согласованное с парой функций \mathcal{P} , Q , удовлетворяет условию Ка) из § 8.

Пусть $\tilde{N}^{**}(\lambda)$ обозначает число пар $(p, q) \in \Lambda$, таких, что $\lambda_{pq}^{(0)} \in] 0, \lambda [$. Из оценки (9.13) следует, что

$$\tilde{N}^{**}(\lambda - d_4 \sqrt{\lambda'}) \leq N^*(\lambda) \leq \tilde{N}^{**}\left(\lambda + \frac{d_4^2}{2} \sqrt{d_4^2 \lambda + \frac{d_4^4}{4}}\right). \quad (9.15)$$

Далее покажем, что:

- I. Для любого $\lambda > 0$ число точек $(p, q) \in \Lambda$, таких, что $\lambda_{pq}^{(0)} \in] \lambda, \lambda + \sqrt{\lambda'} [$, не превосходит $d_5 \sqrt{\lambda}$.
- II. $\tilde{N}^{**}(\lambda) = \frac{1}{8\pi^2} \int_E |\mathcal{P}'(\eta)Q(\eta) - Q'(\eta)\mathcal{P}(\eta)| d\eta \cdot \lambda + O(\lambda^{1/2 + (\alpha+1)/6})$.

Из утверждения I и неравенства (9.15) следует неравенство

$$|N^{**}(\lambda) - \tilde{N}^{**}(\lambda)| \leq \text{const} \cdot \sqrt{\lambda'}, \quad (9.16)$$

что вместе с II доказывает формулу (9.14). Свойство Кб) следует из утверждения I и неравенства (9.16). Итак, осталось доказать утверждения I и II.

Продолжим функции $\mathcal{P}(\eta)$ и $Q(\eta)$ до дважды непрерывно дифференцируемых функций на $[\alpha, b]$. Продолженные функции будем обозначать теми же буквами. Потребуем, чтобы для продолженных функций \mathcal{P} и Q значения функций

$$\Delta(\eta) = \mathcal{P}(\eta)Q'(\eta) - Q(\eta)\mathcal{P}'(\eta),$$

$$\Delta_1(\eta) = \mathcal{P}^2(\eta) + Q^2(\eta)$$

были отделены от нуля. При $\eta \in E$ функции $\Delta(\eta)$ и $\Delta_1(\eta)$ отделены от нуля в силу $\mathcal{P}Q3$) и $\mathcal{P}Q4$). Пусть для определенности $\Delta(\eta) > 0$. Требуемое продолжение можно осуществить следующим образом. Пусть $\theta(\eta)$ - угол, определяемый из соотношений

$$\mathcal{P}(\eta) = \sqrt{\Delta_1(\eta)} \cos \theta(\eta), \quad Q(\eta) = \sqrt{\Delta_1(\eta)} \sin \theta(\eta). \quad (9.17)$$

Легко видеть, что

$$\frac{d\theta}{d\eta} = \frac{\Delta(\eta)}{\Delta_1(\eta)} > 0. \quad (9.18)$$

Продолжим $\theta(\eta)$ и $\Delta_1(\eta)$ до гладких функций на $[a, b]$ так, чтобы $\Delta_1(\eta)$ и θ'_η были положительными. Тогда функции $\mathcal{P}(\eta)$ и $\theta(\eta)$, определяемые формулами (9.17), будут обладать требуемыми свойствами.

Пусть $\lambda > 0$. Рассмотрим кривую на плоскости (p, q) , задаваемую параметрически уравнениями

$$p = \frac{1}{2\pi} \mathcal{P}(\eta) \sqrt{\lambda}, \quad q = \frac{1}{2\pi} \mathcal{Q}(\eta) \sqrt{\lambda}, \quad \eta \in [a, b]. \quad (9.19)$$

Положительность $\Delta(\eta)$ означает, что угол составляемый вектором (p, q) и осью p , монотонно возрастает с увеличением η с положительной скоростью. Рассмотрим область $\mathcal{D}(\lambda)$ на плоскости (p, q) , ограниченную кривой (9.19) и парой отрезков прямой, соединяющих начало координат с крайними точками дуги (9.19). Из теоремы Яриика^{*)} [42] следует, что число целых точек $N(\mathcal{D}(\lambda))$, принадлежащих области $\mathcal{D}(\lambda)$, при больших λ равно

$$N(\mathcal{D}(\lambda)) = \frac{1}{8\pi^2} \int_a^b \Delta(\eta) d\eta \cdot \lambda + O(\sqrt{\lambda}). \quad (9.20)$$

Пусть $\hat{\eta}_{pq} \in [a, b]$ определяется из условия

$$\hat{p} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{P}(\hat{\eta}_{pq}) \sqrt{\lambda}, \quad \hat{q} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{Q}(\hat{\eta}_{pq}) \sqrt{\lambda}, \quad (9.21)$$

где \hat{p} и \hat{q} — точки пересечения с границей области $\mathcal{D}(\lambda)$ луча, исходящего из начала координат и проходящего через точку (p, q) . Этим условием $\hat{\eta}_{pq}$ определяется однозначно для всех $(p, q) \in \mathcal{D}(\lambda)$, и значение $\hat{\eta}_{pq}$ не зависит от λ . Из условия квантовая (9.8) следует, что для $(p, q) \in \Lambda$

$$|\eta_{pq} - \hat{\eta}_{pq}| \leq \text{const} \cdot (\sqrt{p^2 + q^2})^{-1-\alpha}. \quad (9.22)$$

Действительно, условие (9.8) означает, что (p, q) находится на расстоянии, не превышающем $d_2^{-1} \mathcal{K}(\sqrt{p^2 + q^2})^{-\alpha}$, от прямой, соединяющей начало координат и точку (\hat{p}, \hat{q}) , где

$$\hat{p} = (2\pi)^{-1} \mathcal{P}(\eta_{pq}) \sqrt{\lambda}, \quad \hat{q} = (2\pi)^{-1} \mathcal{Q}(\eta_{pq}) \sqrt{\lambda}.$$

^{*)} Теорема Яриика утверждает, что для области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной замкнутой спрямляемой дугой $\partial\mathcal{D}$, число $N(\mathcal{D})$ целых точек в \mathcal{D} , площадь $|\mathcal{D}|$ области \mathcal{D} и длина $|\partial\mathcal{D}|$ дуги $\partial\mathcal{D}$ связаны неравенством $|N(\mathcal{D}) - |\mathcal{D}|| < |\partial\mathcal{D}|$.

Пусть $t = 2\pi(p^2 + q^2)^{1/2} \cdot (\mathcal{P}^2(\hat{\eta}_{pq}) + Q^2(\hat{\eta}_{pq}))^{-1/2}$;

$$t_1 = 2\pi(p\mathcal{P}(\eta_{pq}) + qQ(\eta_{pq}))(\mathcal{P}^2(\eta_{pq}) + Q^2(\eta_{pq}))^{-1},$$

тогда в силу условия (9.21)

$$p = \frac{1}{2\pi} \mathcal{P}(\hat{\eta}_{pq}) t, \quad q = \frac{1}{2\pi} Q(\hat{\eta}_{pq}) t, \quad (9.23)$$

$$\pi \left(p - \hat{p} \frac{t_1}{\sqrt{\lambda}} \right)^2 + \left(q - \hat{q} \frac{t_1}{\sqrt{\lambda}} \right)^2 \leq \frac{K^2}{d_2^2 (p^2 + q^2)^\alpha}. \quad (9.24)$$

Из соотношений (9.23) и (9.24) следует, что

$$\frac{[\mathcal{P}(\hat{\eta}_{pq})Q(\eta_{pq}) - Q(\hat{\eta}_{pq})\mathcal{P}(\eta_{pq})]^2}{\mathcal{P}^2(\eta_{pq}) + Q^2(\eta_{pq})} \leq \frac{4\pi^2 K^2 t^{-2}}{d_2^2 (p^2 + q^2)^\alpha}. \quad (9.25)$$

В силу соотношения (9.18) векторное произведение векторов $(\mathcal{P}(\eta_{pq}), Q(\eta_{pq}))$ и $(\mathcal{P}(\hat{\eta}_{pq}), Q(\hat{\eta}_{pq}))$ оценивается снизу величиной $\text{const} \cdot |\eta_{pq} - \hat{\eta}_{pq}|$. Из этой оценки и из неравенства (9.25) следует оценка (9.22).

В дальнейших рассуждениях выбросим из множества Λ точки (p, q) , находящиеся от боковых отрезков области $\mathcal{D}(\lambda)$ на расстоянии, не превышающем $K(\mathcal{P}^2(a) + Q^2(a))^{-1}(\sqrt{p^2 + q^2})^{-\alpha}$ и $K(\mathcal{P}^2(b) + Q^2(b))^{-1}(\sqrt{p^2 + q^2})^{-\alpha}$ соответственно. Число таких точек не превышает $\text{const} \cdot \sqrt{\lambda}$ и они не оказывают влияния на справедливость утверждений I и II.

Существует положительная постоянная d_6 , обладающая свойством: если $(p, q) \in \Lambda$, то из неравенства $\lambda_{pq}^{(0)} < \lambda$ следует принадлежность (p, q) множеству $\mathcal{D}(\lambda + d_6 \sqrt{\lambda})$, и из принадлежности (p, q) множеству $\mathcal{D}(\lambda)$ следует неравенство $\lambda_{pq}^{(0)} < \lambda + d_6 \sqrt{\lambda}$. Например, из неравенства $p^2 + q^2 < \frac{1}{4\pi^2} (\mathcal{P}^2(\eta_{pq}) + Q^2(\eta_{pq})) \lambda$ в силу (9.22) следует неравенство

$$p^2 + q^2 < \frac{1}{4\pi^2} (\mathcal{P}^2(\hat{\eta}_{pq}) + Q^2(\hat{\eta}_{pq})) (\lambda - \text{const} \cdot (\sqrt{\lambda})^{1-\alpha}),$$

которое эквивалентно принадлежности (p, q) множеству $\mathcal{D}(\lambda + \text{const} \cdot (\sqrt{\lambda})^{1-\alpha})$. Поэтому точки $(p, q) \in \Lambda$, для которых $\lambda_{pq}^{(0)} \in]\lambda, \lambda + \sqrt{\lambda}[$, все (за оговоренным выше исключением) лежат в множестве $\mathcal{D}(\lambda + (d_6 + 1)\sqrt{\lambda}) \setminus \mathcal{D}(\lambda - d_6 \sqrt{\lambda})$ и в

силу теоремы Яриика число этих точек не превышает $\text{const} \cdot \sqrt{\lambda}$, т.е. утверждение I справедливо.

Эти же рассуждения показывают, что с точностью до величин порядка $\sqrt{\lambda}$ число $\tilde{N}^{**}(\lambda)$ совпадает с числом целых точек (p, q) , попавшим в $\mathcal{D}(\lambda) \setminus \bigcup_i \mathcal{D}_i$, где \mathcal{D}_i — замкнутые области, отвечающие интервалам $\tilde{\Delta}_i$, составляющим множество $[a, b] \setminus E$. Область \mathcal{D}_i состоит из сектора, образованного лучами $p = \mathcal{P}(\eta)t$, $q = \mathcal{Q}(\eta)t$, где η пробегает интервал $\tilde{\Delta}_i$, из которого удалены точки (p, q) , удовлетворяющие неравенству

$$|p\mathcal{Q}(\eta_j) - q\mathcal{P}(\eta_j)| < K(\sqrt{p^2 + q^2})^{-\alpha}, \quad (9.26)$$

η_j , $j=1, 2$, — концы интервала $\tilde{\Delta}_i$ (рис. 16).

Число целых точек, попавших в область $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}(\lambda)$ в силу теоремы Яриика удовлетворяет оценке

$$|N(\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}(\lambda)) - |\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}(\lambda)|| \leq \text{const} \cdot \sqrt{\lambda}. \quad (9.27)$$

Вместе с тем очевидно, что

$$\left| |\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}(\lambda)| - \frac{1}{8\pi^2} \int_{\tilde{\Delta}_i} \Delta(\eta) d\eta \cdot \lambda \right| \leq \text{const} \cdot \sqrt{\lambda}. \quad (9.28)$$

Число M непустых областей $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}(\lambda)$ удовлетворяет оценке

$$M \leq \text{const} \cdot \lambda^{\frac{\alpha+1}{6}}. \quad (9.29)$$

Докажем оценку (9.29). Из неравенства (9.26) следует, что множество $\mathcal{D}(\lambda) \cap \mathcal{D}_i$ пусто, если

$$\frac{1}{2\pi} |\mathcal{P}(\eta_1)\mathcal{Q}(\eta_2) - \mathcal{Q}(\eta_1)\mathcal{P}(\eta_2)| < \frac{K}{\sqrt{\lambda}} \left(\max_j \frac{1}{2\pi} \sqrt{\Delta_1(\eta_j)\lambda} \right)^{-\alpha}. \quad (9.30)$$

Это сразу дает оценку для ширины интервала $\tilde{\Delta}_i$, необходимую для того, чтобы множество $\mathcal{D}(\lambda) \cap \mathcal{D}_i$ было пусто:

$$|\tilde{\Delta}_i| > d_7 (\sqrt{\lambda})^{-1-\alpha}. \quad (9.31)$$

Из условия (9.30) получаем требуемую оценку (9.29). Из соотношений (9.20), (9.27) — (9.29) следует оценка

$$\tilde{N}^{**}(\lambda) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{[a,b] \setminus \bigcup_i \tilde{\Delta}_i} \Delta(\eta) d\eta \cdot \lambda + O\left(\lambda^{\frac{1}{2} + \frac{1+\alpha}{6}}\right). \quad (9.32)$$

Здесь объединение $U_i \tilde{\Delta}_i$ распространено на $\tilde{\Delta}_i$, для которых $\mathcal{D}(\lambda) \cap \mathcal{D}_i$ не пусто. Для того чтобы получить требуемую оценку II, надо выбросить оставшиеся интервалы и оценить получившуюся при этом погрешность. Мера суммы оставшихся интервалов $\tilde{\Delta}_i$ с $|\tilde{\Delta}_i| \leq d_7 \lambda^{-(1+\alpha)/2}$ в силу свойства P(2) не превосходит $\text{const.} \cdot \lambda^{-\frac{1+\alpha}{2} \frac{\sigma-1}{\sigma+1}}$. Следовательно, получающаяся при удалении этих интервалов из области интегрирования погрешность в формуле (9.32) не превосходит $\text{const.} \cdot \lambda^{1-\frac{1+\alpha}{2} \frac{\sigma-1}{\sigma+1}}$. Верно неравенство

$$1 - \frac{1+\alpha}{2} \frac{\sigma-1}{\sigma+1} < \frac{1}{2} + \frac{1+\alpha}{\sigma},$$

которое показывает, что изменение не превосходит по порядку остаточного члена $O(\lambda^{1/2+(1+\alpha)/\sigma})$ в оценке (9.32). ■

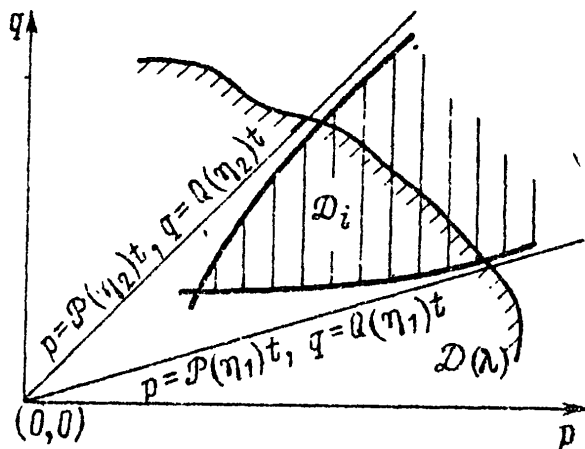


Рис. 16. Область \mathcal{D}_i .

§ 10. Оценка суммарной кратности спектра, аппроксимируемого квазимодами

В следующей главе для оператора Лапласа в выпуклой области Ω по семейству кривых, инвариантных относительно преобразования $T: \Sigma \rightarrow \Sigma$, будет построено семейство квазимод $\{\Lambda, \{U_{pq}\}, \{\lambda_{pq}\}\}$, согласованное с парой функций $\mathcal{P}(\eta), \mathcal{Q}(\eta)$, определенных в § 6. Теорема 9 утверждает, что числа λ_{pq} близки с точностью до величины $O((\sqrt{p^2+q^2})^{-\nu})$ к истинным собственным числам оператора Лапласа и что в некотором смысле аналогичное утверждение имеет место и для функций U_{pq} по отношению к истинным собственным функциям оператора Лапласа. Число ν — порядок семейства квазимод — можно назначить сколь угодно большим. Таким образом, получаем детальную аппроксимацию отдельных

собственных чисел, тем более точную, чем больше эти собственные числа.

Какую часть от всех собственных чисел оператора Лапласа составляют собственные числа, детальной асимптотикой которых является последовательность λ_{pq} ? Ответ на этот вопрос дают теоремы I0, II и формула (6.14). Число $N^*(\lambda)$ этих собственных чисел, принадлежащих интервалу $]0, \lambda[$, при $\lambda \rightarrow +\infty$ выражается формулой

$$N^*(\lambda) = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \text{Мера инвариантных торов} \\ \text{в фазовом пространстве} \\ \text{потока} \end{array} \right\}}{8\pi^2} \lambda + O\left(\lambda^{\frac{1}{2} + \frac{1+\alpha}{\sigma}}\right). \quad (10.1)$$

Рассмотрим область Ω_ε , близкую к кругу (см. (5.19)). Из оценки (5.28) следует, что в этом случае мера семейства инвариантных торов, соответствующих инвариантным кривым, построенным в § 5, отличается от меры всего фазового пространства равной $2\pi |\Omega_\varepsilon|$, на величину порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Сравнивая (10.1) с формулой Г. Вейля (7.6), получаем, что при больших λ

$$\frac{N^*(\lambda)}{N(\lambda)} > 1 - \text{const} \cdot \sqrt{\varepsilon}, \quad (10.2)$$

т.е. аппроксимируется большая часть собственных чисел.

Для произвольной выпуклой области всегда существуют, как следует из результатов гл. I, семейства инвариантных кривых. Следовательно, можно строить семейства квазимод. Так как мера множества $E_{\sigma, \sqrt{\varepsilon}} \cap [a, b]$ при малых ε положительна, то семейства соответствующих инвариантных торов имеют положительную меру dM в фазовом пространстве потока S_t . Сравнивая формулу (10.1) с формулой Г. Вейля, получаем, что при больших λ отношение $N^*(\lambda)/N(\lambda)$ ограничено снизу положительной постоянной, т.е. множество собственных чисел оператора Лапласа, аппроксимируемых детальной асимптотикой, построенной в этой книге, имеет положительную плотность в множестве всех собственных чисел оператора Лапласа.

КВАЗИМОДЫ

В этой главе построим семейство квазимод $\{\Lambda, \{U_{pq}\}, \{\lambda_{pq}\}\}$ для оператора Лапласа $-\Delta$ с нулевым граничным условием в выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Основой для построений является n -компонентное семейство инвариантных кривых (см. определение в § 5, число n может быть равно и единице), причем предполагается, что функции $\mathcal{P}(\eta)$ и $Q(\eta)$, связанные с этим семейством, удовлетворяют условиям $\mathcal{P}Q1) - \mathcal{P}Q4)$ из § 9. Семейство квазимод будет согласовано с функциями $\mathcal{P}(\eta)$ и $Q(\eta)$. В построениях этой главы использованы функции, введенные в § 6 и, в частности, обозначения из списка обозначений, приведенного на с. 55-56. В этой главе $E = E_{\sigma, \sqrt{\epsilon}} \cap [\alpha, b]$.

§ II. Определение индекса

Квазиклассические выражения для собственных функций, связанные с инвариантным относительно потока \mathcal{Z}_t тором \mathcal{T}_η , существенно отличны от нуля в той части области Ω , которая покрывается тором \mathcal{T}_η при проектировании из z на Ω , и экспоненциально малы вне этой части области Ω . Здесь имеется в виду проекция, сопоставляющая точке $z = (x, e) \in \mathcal{Z}$ точку $x \in \Omega$. При проектировании тора на Ω неизбежно возникают особые точки, их образы в Ω образуют множество, которое назовем каустикой. В случае тора общего положения каустика представляет собой объединение конечного числа гладких дуг, ограничивающих зону осцилляции, квазиклассической "собственной функции", или квазимоды, от зоны ее экспоненциальной малости.

Давно замечено, что фаза квазимоды имеет разрыв на каустике. Более точно: квазимода приближенно выглядит как сумма

конечного числа слагаемых, каждое из которых в точке $x \in \partial\Omega$ соответствует одной из точек $z_j = (x, e_j)$, проектирующихся на x , и в направлении e_j имеет осциллирующий множитель вида $\exp\{i\sqrt{\lambda}\Phi(x)\}$, где $\text{grad}\Phi(x) = e_j$. Если будем изменять x , двигаясь вдоль $\text{line}(z_j)$, то при переходе через каустику функция $\sqrt{\lambda}\Phi(x)$ изменится скачком на $\pm\pi/2$ (рис.17). На самом деле формула для квазимоды не имеет разрыва на каустике, просто в окрестности каустики она имеет другой аналитический характер, более сложный, чем сумма экспонент. Для рассматриваемой задачи это явление детально описано в работе Келлера и Рубинова [43] (см. также монографию [7]).

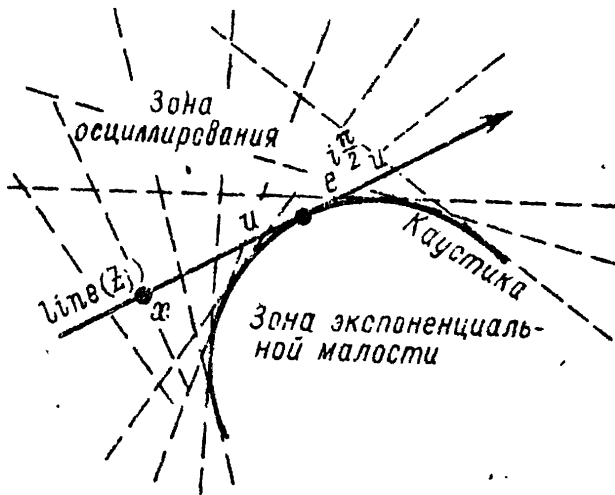


Рис.17. Поведение квазимоды в окрестности каустики. Штриховые линии указывают направление осцилляций.

Наличие скачков в фазе приводит к тому, что для восстановления однозначности квазимоды в формулы в соответствующих местах необходимо вводить целочисленные функции, которые, суммируясь вдоль замкнутого пути, дают целочисленный (по mod 4, так

как $\exp\{i\frac{\pi}{2} \cdot 4k\} = 1$) индекс замкнутого пути, впервые введенный В.П.Масловым [29, 30] и изученный затем В.И.Арнольдом [5].

Инвариантные кривые, в терминах которых будем писать формулы для квазимод, суть пересечения инвариантных торов с поверхностью Σ . Описанное выше явление проявится в том, что в формулы будут входить выражения, зависящие от точки на инвариантной кривой и терпящие скачок при переходе особой (относительно проекции на $\partial\Omega$) точки на этой кривой. Следующие ниже построения носят подготовительный характер и будут использоваться в § 12 при написании формул для квазимод. В частности, определим указанные разрывные выражения.

Пусть набор отображений $\Xi_j: \Pi_{a,b} \rightarrow \Sigma$, $j=0, \dots, n-1$, определяет n -компонентное семейство инвариантных относительно преобразования T кривых с числом вращения из $E = E_{\sigma, \sqrt{E}} \cap [a, b]$. Здесь $T: \Sigma \rightarrow \Sigma$ - преобразование, определенное для выгуклой области Ω в § I. Определим множество $\Gamma_j^{(\varphi)} \subset \Sigma$ как множество всех точек $z = z_j(\xi, \eta) \in \Xi_j(\Pi_{a,b}^E)$, в которых производная $d\varphi_j(\xi, \eta)/d\xi$ обращается в нуль, соответственно $\Gamma_j^{(s)} \subset \Sigma$ - множество всех точек $z = z_j(\xi, \eta) \in \Xi_j(\Pi_{a,b}^E)$, в которых $ds_j(\xi, \eta)/d\xi = 0$. Здесь использованы обозначения 4) и 5) из списка обозначений на с.56. Положим $\Gamma_n^{(s)} = \Gamma_0^{(s)}$.

Лемма II.1. Множества $\Gamma_j^{(s)}, T^{-1}\Gamma_{j+1}^{(s)}, \Gamma_j^{(\varphi)}$, $j=0, 1, \dots, n-1$, попарно не пересекаются.

Доказательство. Так как при разных j или разных η компоненты $\Gamma_\eta^{(j)}$ не пересекаются, то достаточно показать, что для каждого $j=0, \dots, n-1$ и $\eta \in E$ три множества $\Gamma_j^{(\varphi)} \cap \Gamma_\eta^{(j)}$, $\Gamma_j^{(s)} \cap \Gamma_\eta^{(j)}$ и $(T^{-1}\Gamma_{j+1}^{(s)}) \cap \Gamma_\eta^{(j)}$ попарно не пересекаются. Первые два множества не пересекаются, так как Ξ_j - диффеоморфизм и $(H(x, z), \varphi(z))$ - координатная система в Σ , поэтому одновременно $ds/d\xi = (\sin \vartheta)^{-1} dH/d\xi$ и $d\varphi/d\xi$ в нуль обратиться не могут. При $z_{j+1}(\xi, \eta) \in \Gamma_{j+1}^{(s)} \cap \Gamma_\eta^{(j+1)}$ верно равенство

$$\frac{d\varphi_j(\xi, \eta)}{d\xi} = - \frac{d\varphi_{j+1}(\xi, \eta)}{d\xi}, \quad (II.1)$$

являющееся следствием первой из формул (2.2). Отсюда следует, что $(T^{-1}\Gamma_{j+1}^{(s)}) \cap \Gamma_j^{(\varphi)} = \emptyset$, ибо в противном случае было бы непусто пересечение $\Gamma_{j+1}^{(s)} \cap \Gamma_{j+1}^{(\varphi)} \cap \Gamma_\eta^{(j+1)}$. Из геометрических соображений получается равенство

$$\left. \frac{dH_j(x_j(\xi, \eta), \xi', \eta)}{d\xi} \right|_{\xi'=\xi} = \frac{ds_j(\xi, \eta)}{d\xi} \sin \vartheta_j(\xi, \eta). \quad (II.2)$$

Так как $\sin \vartheta_j(\xi, \eta) \neq 0$, то точка $z_j(\xi, \eta) \in \Gamma_j^{(s)}$ тогда и только тогда, когда обращается в нуль левая часть равенства (II.2). При всех $(\xi, \eta) \in \Pi_{a,b}^E$ в силу закона отражения

$$\left. \frac{\partial H_{j+1}(x_{j+1}(\xi, \eta), \xi, \eta)}{\partial \xi'} \right|_{\xi'=\xi} = - \left. \frac{\partial H_j(x_{j+1}(\xi, \eta), \xi', \eta)}{\partial \xi'} \right|_{\xi'=\xi} \quad (II.3)$$

Используя тождество (I.3), получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H_{j+1}(x_{j+1}(\xi, \eta), \xi', \eta)}{\partial \xi'} \right|_{\xi'=\xi} &= - \left. \frac{\partial H_j(x_j(\xi, \eta), \xi', \eta)}{\partial \xi'} \right|_{\xi'=\xi} + \\ &+ \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} (x_{j+1}(\xi, \eta) - x_j(\xi, \eta), e_j(\xi, \eta)). \end{aligned} \quad (II.4)$$

Пусть $z_j(\xi, \eta) \in \Gamma_j^{(s)}$. Так как $\Gamma_j^{(s)} \cap \Gamma_j^{(\varphi)} = \emptyset$, то последний член в (II.4) в нуль не обращается: он равен произведению $\partial \varphi / \partial \xi \neq 0$ на длину отрезка, соединяющего точки $x_{j+1}(\xi, \eta)$ и $x_j(\xi, \eta)$. Поэтому $z_j(\xi, \eta) \notin T^{-1} \Gamma_{j+1}^{(s)}$, что и требовалось доказать. ■

Каждой инвариантной кривой $\Gamma_\eta \subset \Sigma$ отвечает некоторая кривая $L_\eta \subset \mathbb{R}^2$, называемая каустикой. По определению $L_\eta = \bigcup_{j=0}^{n-1} L_\eta^{(j)}$, где $L_\eta^{(j)}$ — множество всех точек $x \in \mathbb{R}^2$, в которых

$$H_j(x, \xi, \eta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} H_j(x, \xi, \eta) = 0 \quad (II.5)$$

для некоторого $\xi = \xi^1$. Введем на торе \mathcal{T}_η локальную координатную систему (ξ, l) , положив

$$\begin{aligned} H_j(x, \xi, \eta) &= (\tilde{x} - x) \sin \varphi_j(\xi, \eta) - (\tilde{y} - y) \cos \varphi_j(\xi, \eta), \\ l &= (\tilde{x} - x) \cos \varphi_j(\xi, \eta) + (\tilde{y} - y) \sin \varphi_j(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (II.6)$$

$$\varphi = \varphi_j(\xi, \eta).$$

Здесь $(\tilde{x}, \tilde{y}, \varphi)$ — координаты точки $z \in \mathcal{T}_\eta$ в пространстве Z (см. § I). В координатах (ξ, l) легко вычисляется якобиан проекции $\mathcal{T}_\eta \rightarrow \Omega$. Он равен

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, l)} = \frac{\partial H_j(x, \xi, \eta)}{\partial \xi} \quad (II.7)$$

Мы видим, что точки каустики суть образы особых относительно проецирования на Ω точек тора \mathcal{T}_η .

Лемма II.2. Множество $L_\eta^{(j)}$ допускает параметрическое представление $x = x_\eta^{(j)}(\xi), y = y_\eta^{(j)}(\xi)$, где $(x_\eta^{(j)}(\xi), y_\eta^{(j)}(\xi))$ - решение системы (II.5) относительно неизвестной x . Параметр ξ в этом представлении пробегает множество $S^1 \setminus \{\xi_i\}$, где ξ_i - точки окружности S^1 , в которых $z_j(\xi, \eta) \in \Gamma_j^{(\varphi)}$. Функции $x_\eta^{(j)}(\xi)$ и $y_\eta^{(j)}(\xi)$ гладкие и $|x_\eta^{(j)}(\xi)| + |y_\eta^{(j)}(\xi)| \rightarrow +\infty$, когда ξ приближается к тем значениям, для которых $z_j(\xi, \eta) \in \Gamma_j^{(\varphi)}$.

Доказательство. В силу тождества (I.3) система (II.5) является линейной относительно x и с определителем, равным $\varphi'_\xi(z_j(\xi, \eta))$. Последний отличен от нуля при $z_j(\xi, \eta) \notin \Gamma_j^{(\varphi)}$. Если же $z_j(\xi, \eta) \in \Gamma_j^{(\varphi)}$, то $\varphi'_\xi(z_j(\xi, \eta)) = 0$, и для любого $x \in \mathbb{R}^2$ выполняется неравенство $\partial H_j(x, \xi, \eta) / \partial \xi \neq 0$, в силу того, что E - диффеоморфизм. Это доказывает первую часть утверждения леммы и гладкую зависимость $x_\eta^{(j)}$ и $y_\eta^{(j)}$ от (ξ, η) . Если бы $|x_\eta^{(j)}(\xi)| + |y_\eta^{(j)}(\xi)|$ не стремилось к ∞ при $z_j(\xi, \eta) \rightarrow \Gamma_j^{(\varphi)}$, то можно было бы выбрать последовательность $\xi_l \rightarrow \xi^*$, $l \rightarrow \infty$, такую, что $(x_\eta^{(j)}(\xi_l), y_\eta^{(j)}(\xi_l)) \rightarrow (x^*, y^*)$ и $z_j(\xi^*, \eta) \in \Gamma_j^{(\varphi)}$. В силу непрерывности левых частей (II.5) пара (x^*, y^*) удовлетворяла бы системе (II.5) при $\xi = \xi^*$, что противоречит предыдущему рассуждению. ■

Из леммы II.2 и формулы (II.2) следует, что точки $z_j(\xi, \eta) \in \Gamma_j^{(s)} \cup T^{-1} \Gamma_{j+1}^{(s)}$ - это как раз те точки, для которых $x_j(\xi, \eta) \in L_\eta^{(j)}$, т.е. они соответствуют выходу каустики на границу области Ω . Точки же $z_j(\xi, \eta) \in \Gamma_j^{(\varphi)}$ соответствуют уходу каустики на бесконечность. На фиксированной окружности $\Gamma_\eta^{(j)}$ можем покрыть множество $\Gamma_j^{(\varphi)} \cap \Gamma_\eta^{(j)}$ конечной системой интервалов, концы которых не лежат в $\Gamma_j^{(\varphi)}$ и для которых выполнено условие: точки каустики, соответствующие точкам этих интервалов, лежат вне Ω . Поскольку множество E , пробегаемое параметром η , нигде не плотно, то подобное покрытие можно построить для всего $\Gamma_j^{(\varphi)}$, беря вместо интервалов узкие прямоугольники со сглаженными углами. Построим для каждого j конечную систему пар (U_{jk}, Γ_{jk}) , где U_{jk} - область с гладкой границей в Σ , Γ_{jk} - гладкая дуга, лежащая в U_{jk} , так, чтобы выполнялись условия:

а) U_{jk} покрывает $\Gamma_j^{(\varphi)}$, при разных k области U_{jk} попарно не пересекаются

б) точки каустики $L_{\eta}^{(j)}$, соответствующие точкам из $\Gamma_j^{(j)} \cap \bar{U}_{jk}$, лежат вне $\bar{\Omega}$;

в) если инвариантная кривая Γ_{η} пересекается с областью U_{jk} , то она имеет в точности одну точку пересечения с Γ_{jk} и это пересечение трансверсально, пересечение Γ_{η} с U_{jk} связно;

г) граница области U_{jk} гладкая и не содержит точек из $\Gamma_j^{(\varphi)}$.

Обозначим $\psi_{jk}(\eta)$ точку пересечения Γ_{η} с Γ_{jk} . Определим гладкие функции $\xi_{jk}(\eta)$, $\xi_{jk}(H, \eta)$ и $\varphi_{jk}(H, \eta)$ равенствами

$$z_j(\xi_{jk}(\eta), \eta) = \psi_{jk}(\eta), \quad (II.8)$$

$$H_j(x(\psi_{jk}(\eta)), \xi_{jk}(H, \eta), \eta) = H, \quad (II.9)$$

$$\xi_{jk}(0, \eta) = \xi_{jk}(\eta), \quad (II.10)$$

$$\varphi_{jk}(H, \eta) = \varphi_j(\xi_{jk}(H, \eta), \eta) \quad (II.11)$$

и требованием, чтобы при фиксированном $\eta \in E$ область определения $\xi_{jk}(H, \eta)$ и $\varphi_{jk}(H, \eta)$ была интервалом, непустым, если Γ_{η} пересекается с U_{jk} . Рассмотрим равенство (II.9) как уравнение относительно неизвестной функции $\xi_{jk}(H, \eta)$. Тогда (II.10) является начальным данным для этого уравнения. Так как в окрестности $\Gamma_j^{(\varphi)}$ производная $\partial H_j / \partial \xi$ отлична от нуля, это уравнение разрешимо и при каждом η получаем функцию $\xi_{jk}(H, \eta)$, определенную на непустом интервале, содержащем 0, если $\Gamma_{\eta} \cap U_{jk} \neq \emptyset$. Производная $\partial H_j / \partial \xi$ отлична от нуля во всех точках, в которых $\varphi'_j = 0$. Поэтому указанный интервал можно выбрать таким широким, чтобы на его концах H_1, H_2 было выполнено условие $z_j(\xi_{jk}(H_{1,2}, \eta), \eta) \notin \Gamma_j^{(\varphi)}$. Будем считать, что окрестности U_{jk} таковы, что в дополнение к условиям а)-г) выполняется условие:

д) при всяком $\eta \in E$, таком, что $\Gamma_{\eta} \cap U_{jk} \neq \emptyset$, интервал по переменной H , на котором определены функции $\xi_{jk}(H, \eta)$ и $\varphi_{jk}(H, \eta)$, содержит все значения H , допускающие представление в виде $H = H(x(\psi_{jk}(\eta)), z)$, где $z \in U_{jk}$.

Если с самого начала построенные функции не обладали свойством д), то можем уменьшить множества U_{jk} , оставив функции неизменными, чтобы условие д) выполнялось. Введем обозна-

чение, которое понадобится в следующем параграфе:

$$\xi_{jk}(z, \eta) = \xi_{jk}(H(x(\psi_{jk}(\eta)), z); \eta) \quad (11.12)$$

при $z \in U_{jk}$ и $\Gamma_\eta \cap U_{jk} \neq \emptyset$. На остальные значения $\eta \in [\alpha, b]$ продолжим $\xi_{jk}(\xi, \eta)$ гладким образом. При этих построениях используется тот факт, что множество E замкнуто и нигде не плотно.

Определим $\text{Ind}(\xi_{jk}(\eta))$ следующим образом. Инвариантная кривая Γ_η в силу условия в) пересекает границу U_{jk} лишь в двух точках: $z_j(\xi_1, \eta)$ и $z_j(\xi_2, \eta)$, $\xi_1 < \xi_2$. Эти точки не принадлежат $\Gamma_j^{(\varphi)}$ и $\Gamma_j^{(\psi)}$ в силу условий г) и б). Поэтому отличны от нуля производные в правой части следующего равенства, определяющего $\text{Ind}(\xi_{jk}(\eta))$:

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\xi_{jk}(\eta)) = & \frac{1}{2} \text{sign} \left(\frac{\partial H_j(x_j(\xi_2, \eta), \xi', \eta)}{\partial \xi'} \cdot \frac{\partial \varphi_j(\xi', \eta)}{\partial \xi'} \right) \Big|_{\xi'=\xi_2} - \\ & - \frac{1}{2} \text{sign} \left(\frac{\partial H_j(x_j(\xi_1, \eta), \xi', \eta)}{\partial \xi'} \cdot \frac{\partial \varphi_j(\xi', \eta)}{\partial \xi'} \right) \Big|_{\xi'=\xi_1}. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Число $\text{Ind}_j(\xi_0, \xi, \eta)$ определяется как сумма $\text{Ind}(\xi_{jk}(\eta))$ по всем точкам $\xi_{jk}(\eta)$, попавшим в интервал $]\xi_0, \xi[$ в случае если $\xi_0 < \xi$ и ξ_0 и ξ не являются точками вида $\xi_{jk}(\eta)$. Если точка ξ совпадает с точкой $\xi_{jk}(\eta)$, то $\text{Ind}_j(\xi_0, \xi_{jk}(\eta), \eta)$ определяется из условия

$$\text{Ind}_j(\xi_0, \xi_i, \eta) = \text{Ind}_j(\xi_0, \xi_{jk}(\eta), \eta) + \frac{1}{2} \text{sign} \frac{\partial H}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_i}, \quad i=1,2. \quad (11.14)$$

Это определение согласуется с равенством (11.13) и определением $\text{Ind}_j(\xi_0, \xi, \eta)$ для остальных точек. Точку ξ_0 будем выбирать так, чтобы она не совпадала ни с одной из точек вида $\xi_{jk}(\eta)$. При $\xi_0 > \xi$ индекс определяется равенством

$$\text{Ind}_j(\xi_0, \xi, \eta) = -\text{Ind}_j(\xi, \xi_0, \eta), \quad (11.15)$$

если ξ не совпадает с точками вида $\xi_{jk}(\eta)$ и равенством (11.14) в противном случае. Функция $\text{Ind}_j(\xi_0, \xi, \eta) - \pi_n \xi$, где

$$\pi_n = \begin{cases} 0, & n=1, \\ 2, & n \geq 2, \end{cases} \quad (11.16)$$

периодическая по переменной ξ с периодом 1.

Определим число

$$\tau(\eta) = \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j(\eta, \xi_0), \quad (II.17)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_j(\eta, \xi_0) = & \frac{1}{2} \operatorname{sign} \left(\frac{\partial H_j(\alpha_j(\xi, \eta), \xi', \eta)}{\partial \xi'} \frac{\partial \varphi_j(\xi', \eta)}{\partial \xi'} \right) \Bigg|_{\xi' = \tilde{\xi}_j} + \\ & + \frac{1}{2} \operatorname{sign} \left(\frac{\partial H_{j-1}(\alpha_j(\xi, \eta), \xi', \eta)}{\partial \xi'} \frac{\partial \varphi_{j-1}(\xi', \eta)}{\partial \xi'} \right) \Bigg|_{\xi' = \tilde{\xi}_{j-1}} + \\ & + \operatorname{Ind}_j(\xi_0, \xi, \eta) - \operatorname{Ind}_{j-1}(\xi_0, \xi, \eta). \end{aligned} \quad (II.18)$$

Здесь по определению $\operatorname{sign} 0 = 0$, $\operatorname{Ind}_{-1}(\xi_0, \xi, \eta) = \operatorname{Ind}_{n-1}(\xi_0, \xi - \eta, \eta)$, числа $\tilde{\xi}_j$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, определены ниже. Определим правую часть (II.18) при всех ξ , кроме конечного числа значений $\xi = \xi_{j,k}(\eta)$ и $\xi = \xi_{j-1,k}(\eta)$. Если $z_j(\xi, \eta)$ не принадлежит никакой из окрестностей $U_{j,k}$, то $\tilde{\xi}_j = \xi$. Если же $z_j(\xi, \eta) \in U_{j,k}$, то такие ξ заполняют интервал $] \xi_1, \xi_2 [$, содержащий $\xi_{j,k}(\eta)$. В этом случае $\tilde{\xi}_j = \xi_1$, если $\xi < \xi_{j,k}$ и $\tilde{\xi}_j = \xi_2$, если $\xi > \xi_{j,k}(\eta)$. По определению $U_{-1,k} = U_{n-1,k}$.

Число $\tau(\eta)$ не зависит ни от ξ_0 , ни от ξ . Независимость от ξ_0 очевидна в силу аддитивности Ind . Каждый член в сумме (II.17) в отдельности не зависит от ξ . Действительно, правая часть (II.18) как функция ξ может меняться лишь в двух случаях: 1) при переходе через точку вида $\xi_{j',k}(\eta)$, $j' = j, j-1, 2$) при переходе через точки ξ , для которых $z_j(\xi, \eta) \in \Gamma_j^{(s)}$. В первом случае изменение Ind_j компенсируется изменением одного из двух первых членов в правой части (II.18). Во втором случае последние два члена постоянны. Покажем, что сумма первых двух членов в (II.18) равна нулю, когда $z_j(\xi, \eta)$ находится в окрестности $\Gamma_j^{(s)}$. Если $z_j(\xi, \eta) \in \Gamma_j^{(s)}$, то в силу равенства (II.1) знаки $\partial \varphi_j / \partial \xi$ и $\partial \varphi_{j-1} / \partial \xi$ противоположны. Это сохраняется при малых шевелениях ξ . Требуемый результат получается отсюда и из равенства (II.3).

§ 12. Формулы для квазимод

В этом параграфе и далее Λ — бесконечное подмножество двумерной целочисленной решетки $Z \times Z$, построенное в § 9 по

функциям $\mathcal{P}(\eta)$ и $Q(\eta)$, связанным с нашим семейством инвариантных кривых. Как уже отмечалось в § 6, $\mathcal{P}(\eta)$ не меняет знака, можно считать, что $\mathcal{P}(\eta) > 0$. Будем это предполагать. Условие квантования (9.8) показывает, что при этом $p > 0$, т.е. все множество Λ располагается в правой полуплоскости.

Построим финитные гладкие функции $\chi_{jk}(z)$ так, чтобы а) $\text{supp } \chi_{jk} \subset U_{jk}$; б) $\sum_k \chi_{jk}(z) = 1$ в некоторой окрестности множества $\Gamma_j^{(q)}$; в) для любой инвариантной кривой Γ_η пересечение $\Gamma_\eta \cap \text{supp } \nabla \chi_{jk}$, если оно не пусто, состояло из двух интервалов: на одном χ_{jk} возрастало бы, на другом убывало. Этого можно добиться за счет разрывности множества E . Пусть

$$\chi_j(\xi, \eta) = 1 - \sum_k \chi_{jk}(z_j(\xi, \eta)). \quad (12.1)$$

Вместо квазимод U_{pq} , приближенно удовлетворяющих уравнению

$$(\Delta + \lambda_{pq}) U = 0 \quad (12.2)$$

и точно удовлетворяющих граничному условию $U|_{\partial\Omega} = 0$, будем строить функции u_{pq} , точно удовлетворяющие уравнению (12.2) и приближенно граничному условию. Формула для $u_{pq}(z)$ имеет вид

$$u_{pq}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} u_{pq}^{(j)}(z), \quad (12.3)$$

где

$$\begin{aligned} u_{pq}^{(j)}(z) = & \int_0^1 \chi_j(\xi, \eta_{pq}) e^{i\Phi_j(z, \xi, p, q)} \sqrt{\left| \frac{d\varphi_j(\xi, \eta_{pq})}{d\xi} \right|} \times \\ & \times \left\{ p^{1/2} + \sum_{s=1}^{j+1} p^{-s+1/2} u_s^{(j)}(\xi, \eta_{pq}, \delta_{pq}) \right\} d\xi + \\ & + \sum_k (\mathcal{P}(\eta_{pq}))^{-1/2} \iint \chi_{jk}(z) e^{i\Phi_{jk}(z, z, p, q)} \sqrt{\left| \frac{dE_{jk}(H, \eta_{pq})}{dH} \right|} \Big|_{H=H_1} \times \\ & \times \left\{ p + \sum_{s=1}^{j+1} p^{-s+1} u_s^{(j)}(E_{jk}(z, \eta_{pq}), \eta_{pq}, \delta_{pq}) \right\} dm(z), \quad (12.4) \end{aligned}$$

$$H_1 = H(z(\psi_{jk}(\eta_{pq})), z).$$

В формуле (12.4) функции $\xi_{jk}(H, \eta)$, $\psi_{jk}(\eta)$ и $\xi_{jk}(z, \eta)$ определены формулами (11.8)–(11.10) и (11.11), последовательность η_{pq} определена в § 9. Приведем формулы для $\Phi_j(x, \xi, p, q)$ и $\Phi_{jk}(x, z, p, q)$:

$$\Phi_j(x, \xi, p, q) = 2\pi p \xi + \sqrt{\lambda_{pq}} \left[S_j(x, x_0, \xi_0, \xi, \eta_{pq}) - \mathcal{P}(\eta_{pq}) \xi \right] - \frac{\pi}{2} (\text{Ind}_j(\xi_0, \xi, \eta_{pq}) - \pi_n \xi) + \gamma_j, \quad (12.5)$$

$$\Phi_{jk}(x, z, p, q) = 2\pi \left(p + \frac{1}{4} \pi_n \right) \xi_{jk}(z, \eta_{pq}) + \sqrt{\lambda_{pq}} \left[(x - x(\psi_{jk}(\eta_{pq})), e(z)) + H(x(\psi_{jk}(\eta_{pq})), z) \varphi(z) - \int_0^{H(x(\psi_{jk}(\eta_{pq})), z)} \varphi_{jk}(H, \eta_{pq}) dH - \mathcal{P}(\eta_{pq}) \xi_{jk}(z, \eta_{pq}) \right] + \gamma_{jk}. \quad (12.6)$$

Здесь $S_j(x, x_0, \xi_0, \xi, \eta)$ – функция, определенная формулой (6.3), $\varphi_{jk}(H, \eta)$ и π_n определены формулами (11.4) и (11.16), $\xi_0 \in S^1$ и $x_0 \in \mathbb{R}^2$ – некоторые фиксированные точки, выбранные произвольным образом,

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 0, \\ \gamma_j &= 2\pi(p + \delta_{pq}) \frac{Q_j(x_0, \xi_0, \eta_{pq})}{\mathcal{P}(\eta_{pq})} + \frac{\pi}{2} \tau_j(\eta_{pq}, \xi_0) + \pi + \gamma_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ \gamma_{jk} &= \sqrt{\lambda_{pq}} S_j(x(\psi_{jk}(\eta_{pq})), x_0, \xi_0, \xi_{jk}(\eta_{pq}), \eta_{pq}) - \\ &\quad - \frac{\pi}{2} \text{Ind}_j(\xi_0, \xi_{jk}(\eta_{pq}), \eta_{pq}) + \gamma_j. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Формула для λ_{pq} имеет вид

$$\sqrt{\lambda_{pq}} = \frac{2\pi}{\mathcal{P}(\eta_{pq})} (p + \delta_{pq}) + \sum_{s=1}^{v+1} p^{-s} \alpha_s(\eta_{pq}, \delta_{pq}). \quad (12.8)$$

В правых частях (12.4) и (12.8) имеются отрезки рядов по обратным степеням целочисленного параметра p . Коэффициенты в этих рядах $v_s^{(j)}(\xi, \eta, \delta)$ и $\alpha_s(\eta, \delta)$ – полиномы по переменной δ степени не выше $2s$, причем в формулах (12.4) и (12.8)

$$\delta_{pq} = \frac{\mathcal{P}(\eta_{pq})}{Q(\eta_{pq}) + \eta_{pq} \mathcal{P}(\eta_{pq})} \left\{ q - p \frac{Q(\eta_{pq})}{\mathcal{P}(\eta_{pq})} - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \tau(\eta_{pq}) + \frac{1}{4} \pi_n \eta_{pq} \right\}. \quad (12.9)$$

Из условий квантования следует, что δ_{pq} — ограниченная последовательность.

Обозначим $L_2(\partial\Omega)$ пространство квадратично интегрируемых функций на $\partial\Omega$ с нормой $\|u\|_{L_2(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} |u|^2 ds\right)^{1/2}$.

Теорема 12. Существует последовательность функций $u_s^{(j)}(\xi, \eta, \delta)$, $\alpha_s(\eta, \delta)$, $s = 1, \dots, \nu+1$; $j=0, \dots, n-1$, таких, что последовательность функций $u_{pq}(\xi)$, определяемая формулами (12.3)–(12.9), удовлетворяет оценке

$$\|u_{pq}|_{\partial\Omega}\|_{L_2(\partial\Omega)} = O(p^{-\nu-2}). \quad (12.10)$$

Оценка (12.10) равномерна по q . Функции $u_s^{(j)}(\xi, \eta, \delta)$ и $\alpha_s(\eta, \delta)$ являются полиномами степени, не превышающей $2s$, от переменной δ с гладкими коэффициентами, заданными соответственно на $S^1 \times E$ и E .

Далее всегда будем предполагать, что $u_s^{(j)}$ и α_s полиномы по δ степени не выше $2s$ с гладкими коэффициентами.

Теорема 13. При любом выборе $u_s^{(j)}$ и α_s равномерно по $(p, q) \in \Lambda$

$$\|u_{pq}\|_{L_2(\partial\Omega)}^{-1} = O(1). \quad (12.11)$$

Теорема 14. Если $u_s^{(j)}$ и α_s выбраны в соответствии с утверждением теоремы 12 и $\nu \geq 2$, то равномерно по $((p_1, q_1), (p_2, q_2)) \in \Lambda \times \Lambda$ при $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$ имеет место оценка для скалярного произведения

$$(u_{p_1 q_1}, u_{p_2 q_2}) = O((\min\{p_1, p_2\})^{-2}). \quad (12.12)$$

В последующих параграфах будут доказаны сформулированные теоремы. В оставшейся части этого параграфа покажем, как исходя из семейства функций u_{pq} , для которых справедливы утверждения теорем, строится семейство квазимод $\{\Lambda, \{U_{pq}\}, \lambda_{pq}\}$; согласованное с парой функций $\mathcal{P}(\eta), Q(\eta)$. Числа λ_{pq} определяются формулой (12.8). Покажем, что они удовлетворяют оценке (9.13). Непосредственно из (12.8) получаем, что

$$\lambda_{pq} = \frac{4\pi^2}{\varphi^2} p^2 + O(p).$$

Из условий квантования (9.8) следует, что $q = pQ^{\nu-1} + O(1)$, откуда получаем, что

$$\lambda_{pq}^{(0)} = 4\pi^2 \frac{p^2 + q^2}{\varphi^2 + Q^2} = \frac{4\pi^2}{\varphi^2} p^2 + O(p).$$

Сравнивая полученные выражения для λ_{pq} и $\lambda_{pq}^{(0)}$, убеждаемся в справедливости оценки (9.13).

Каждая функция из последовательности u_{pq} точно удовлетворяет уравнению (12.2), так как представляет собой сумму плоских волн (см. формулу (6.3) для δ_j). Однако мы не можем взять функции u_{pq} в качестве квазимод, так как они не удовлетворяют точно нулевому граничному условию и поэтому не принадлежат области определения оператора Лапласа $-\Delta$ (см. § 7). Вместо функции u_{pq} рассмотрим функцию $U_{pq} = u_{pq} - \tilde{u}_{pq}$, где \tilde{u}_{pq} - решение задачи Дирихле $\Delta \tilde{u} = 0$ для области Ω с краевыми условиями $\tilde{u}_{pq}|_{\partial\Omega} = u_{pq}|_{\partial\Omega}$. Функции U_{pq} уже точно удовлетворяют краевым условиям. Неравенство $\|\tilde{u}_{pq}\|_{L_2(\Omega)} \leq \leq \text{const} \cdot \|\tilde{u}_{pq}|_{\partial\Omega}\|_{L_2(\partial\Omega)}$, справедливое для решения задачи Дирихле в области с гладкой границей, показывает, что нормы в $L_2(\Omega)$ добавочных функций не превышают $\text{const} \cdot p^{-\nu-2}$. Поэтому оценки (12.11) и (12.12) справедливы и для U_{pq} . Применим дифференциальный оператор $\Delta + \lambda_{pq}$ к квазимодам U_{pq} :

$$(\Delta + \lambda_{pq}) U_{pq} = -(\Delta + \lambda_{pq}) \tilde{u}_{pq} = -\lambda_{pq} \tilde{u}_{pq}.$$

Так как $\lambda_{pq} = O(p^2)$, то

$$\|(\Delta + \lambda_{pq}) U_{pq}\|_{L_2(\Omega)} \leq \text{const} \cdot p^{-\nu},$$

что совпадает с требуемой оценкой (8.2).

§ 13. Преобразование выражения для u_{pq} .

Применение метода стационарной фазы

Для доказательства теорем 12-14 удобно представить выражение (12.3) для $u_{pq}(x)$ в другом виде. Пусть $\alpha = \{ \hat{\chi}(\xi, \eta), \hat{\chi}_j(z), 0 \leq j \leq n-1 \}$ - набор гладких функций, заданных соответственно на $S^1 \times E$ и на Σ , $u_{pq}^{(j, \alpha)}(x)$ - функции, полученные

из $u_{pq}^{(j)}(x)$ подстановкой в подынтегральные выражения (12.4) функций $\hat{\chi}_j(\xi, \eta_{pq})$ и $\hat{\chi}_j(z)$ в качестве множителей ($\hat{\chi}_j$ - в однократный интеграл, $\hat{\chi}_j$ - в двукратные)

$$u_{pq}^{(\alpha)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} u_{pq}^{(j, \alpha)}(x).$$

Вместо того, чтобы исследовать $u_{pq}(x)$, будем рассматривать более общую функцию $u_{pq}^{(\alpha)}(x)$. В частном случае, если все входящие в α функции $\hat{\chi}_j$ и $\hat{\chi}_j$ равны тождественно единице, $u_{pq}^{(\alpha)}(x) = u_{pq}(x)$.

В дальнейших формулах оценки вида $O(p^{-k})$ равномерны по $(p, q) \in \Lambda$. Так как $\mathcal{P}(\eta_{pq}) > \text{const} > 0$, то оценка $O(p^{-k})$ эквивалентна оценке $O((\sqrt{p^2 + q^2})^{-k})$.

Выражение для $u_{pq}^{(j, \alpha)}$ содержит в показателе экспоненты число $\sqrt{\lambda_{pq}}$, определяемое формулой (12.8). Совершим следующее преобразование, разложив экспоненту в ряд Тейлора:

$$\exp\left\{i\sqrt{\lambda_{pq}}(S_j(x, \xi) - \mathcal{P}(\eta_{pq})\xi)\right\} = \exp\left\{i2\pi(p + \delta_{pq})(h_j(x, \xi) - \xi)\right\} \times \sum_{s=0}^{j+1} p^{-s} \frac{1}{s!} Y_s(i\alpha_1(h_j - \xi), i\alpha_2(h_j - \xi) \cdot 2!, \dots, i s! \alpha_s(h_j - \xi)) + O(p^{-j-2}), \quad (13.1)$$

где $Y_s(x_1, x_2, \dots, x_s)$ - полиномы Белла (см. [36]),

$$h_j(x, \xi) = \mathcal{P}(\eta_{pq})^{-1} S_j(x, \alpha_n, \xi_0, \xi, \eta_{pq}). \quad (13.2)$$

Аналогичным образом преобразуем экспоненты, присутствующие в подынтегральных выражениях в двукратных интегралах. В результате получим следующее выражение:

$$u_{pq}^{(j, \alpha)}(x) = \int_0^1 e^{i2\pi p h_j(x, \xi)} \left(\sum_{s=0}^{j+1} p^{-s+1/2} g_s^{(j)}(x, \xi) + p^{-j-3/2} \tilde{g}^{(j)}(x, \xi) \right) \hat{\chi}_j(\xi; \eta_{pq}) d\xi + \sum_k \iint e^{i2\pi p h_{jk}(x, z)} \times \left(\sum_{s=0}^{j+1} p^{-s+1} g_{sk}^{(j)}(x, z) + p^{-j-1} \tilde{g}_k^{(j)}(x, z) \right) \hat{\chi}_j(z) dm(z).$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 g_s^{(j)}(\mathfrak{x}, \xi) = & \exp \left\{ i 2 \pi \delta_{pq} (h_j(\mathfrak{x}, \xi) - \xi) - \frac{i \pi}{2} \text{Ind}_j(\xi_0, \xi, \eta_{pq}) + \right. \\
 & \left. + i \pi \pi_n \frac{\xi}{2} + i \gamma_j \right\} \chi_j(\xi, \eta_{pq}) \sqrt{\frac{\partial \varphi_j(\xi, \eta_{pq})}{\partial \xi}} \times \\
 & \times \sum_{\substack{s_1 + s_2 = s \\ s_1, s_2 \geq 0}} v_{s_1}^{(j)}(\xi, \eta_{pq}, \delta_{pq}) \frac{1}{s_2!} Y_{s_2}(i \alpha_1(h_j - \xi), \dots \\
 & \dots, i s_2! \alpha_{s_2}(h_j - \xi)), \\
 & v_0 = 1,
 \end{aligned} \tag{13.4}$$

$$\begin{aligned}
 h_{jk}(\mathfrak{x}, z) = & (\mathcal{P}(\eta_{pq}))^{-1} \left[(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}(\psi_{jk}(\eta_{pq})), e(z)) + \right. \\
 & \left. + H(\mathfrak{x}(\psi_{jk}(\eta_{pq})), z) \varphi(z) - \int_0^{H(\mathfrak{x}(\psi_{jk}(\eta_{pq})), z)} \varphi_{jk}(H, \eta_{pq}) dH + \right. \\
 & \left. + S_j(\mathfrak{x}(\psi_{jk}(\eta_{pq})), \mathfrak{x}_0, \xi_0, \xi_{jk}(\eta_{pq}), \eta_{pq}) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{sk}^{(j)}(\mathfrak{x}, z) = & \mathcal{P}^{-1/2}(\eta_{pq}) \exp \left\{ i 2 \pi \delta_{pq} (h_{jk}(\mathfrak{x}, z) - \xi_{jk}(z, \eta_{pq})) - \right. \\
 & \left. - i \frac{\pi}{2} \text{Ind}_j(\xi_0, \xi_{jk}(\eta_{pq}), \eta_{pq}) + i \frac{\pi}{2} \pi_n \xi_{jk}(z, \eta_{pq}) + i \gamma_j \right\} \times
 \end{aligned} \tag{13.5}$$

$$\times \chi_{jk}(z) \sqrt{\left| \frac{\partial \xi_{jk}(H, \eta_{pq})}{\partial H} \right|_{H=H(\mathfrak{x}(\psi_{jk}(\eta_{pq})), z)}} \times$$

$$\times \sum_{\substack{s_1 + s_2 = s \\ s_1, s_2 \geq 0}} v_{s_1}^{(j)}(\xi_{jk}(z, \eta_{pq}), \eta_{pq}, \delta_{pq}) \frac{1}{s_2!} Y_{s_2}(i \alpha_1(h_{jk}(\mathfrak{x}, z) -$$

$$- \xi_{jk}(z, \eta_{pq}), \dots, i s_2! \alpha_{s_2}(h_{jk}(\mathfrak{x}, z) - \xi_{jk}(z, \eta_{pq}))). \tag{13.6}$$

Далее мы собираемся применить к интегралам в (13.3) метод стационарной фазы, считая p большим параметром. Выражения, получающиеся после применения этого метода, имеют разный характер в зависимости от положения точки x относительно каустики $L_{\eta_{pr}}$. Вне каустики асимптотика имеет вид суммы конечного числа членов, отвечающих невырожденным стационарным точкам. При приближении к каустике стационарные точки сближаются и в таком случае удобно предварительно сделать (локально) преобразование Фурье по одному из направлений. В дальнейшем изложении будем пользоваться следующей леммой метода стационарной фазы, которую сформулируем сразу для случая произвольной размерности m области интегрирования. Доказательство имеется в [37].

Лемма 13.1. Пусть $h(\sigma, \tau)$ и $g(\sigma, \tau)$ — вещественные гладкие функции, определенные на произведении $\mathcal{D} \times X$, где \mathcal{D} — область в \mathbb{R}^m , X — компактное многообразие. Если выполнены условия: а) матрица $h''_{\sigma}(\sigma, \tau)$ не вырождается в точках $(\sigma_i(\tau), \tau) \in \text{supp } g$, в которых $h'_{\sigma}(\sigma, \tau) = 0$, б) $\text{supp } g(\cdot, \tau)$ содержится в некоторой компактной части области \mathcal{D} , но зависящей от τ , то при $p \rightarrow +\infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\int_{\mathcal{D}} e^{iph(\sigma, \tau)} g(\sigma, \tau) d\sigma = \sum_i e^{iph(\sigma_i(\tau), \tau) + i\frac{\pi}{4} \text{sign } h''_{\sigma}(\sigma_i(\tau), \tau)} \times (2\pi)^{m/2} (|\det h''_{\sigma}(\sigma, \tau)|_{\sigma=\sigma_i(\tau)})^{-1/2} \left(\sum_{s=0}^{k-1} p^{-s-\frac{m}{2}} c_s^{(i)}(g; \tau) \right) + O(p^{-k-\frac{m}{2}}) \quad (13.7)$$

равномерно по $\tau \in X$. Здесь k — произвольное целое положительное число,

$$c_s^{(i)}(g; \tau) = \sum_{|\alpha| \leq 2s} c_{s, \alpha}^{(i)}(\tau) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \sigma^{\alpha}} g(\sigma, \tau) \Big|_{\sigma=\sigma_i(\tau)}. \quad (13.8)$$

Коэффициенты $c_{s, \alpha}^{(i)}$ — гладкие функции, определенные на X . Они вычисляются через значения функции $h(\sigma, \tau)$ и ее производных до порядка $2s+2$ включительно в точках $(\sigma_i(\tau), \tau)$. В частности,

$$c_0^{(i)}(g; \tau) = g(\sigma_i(\tau), \tau).$$

Попробуем применить лемму 13.1 к интегралам, входящим в правую часть (13.3). Рассмотрим сначала однократный интеграл.

Используя выражения (13.2), (6.3) и тождество (1.3), получим следующее уравнение для определения стационарных точек:

$$H_j(x, \xi, \eta_{pq}) = 0. \quad (13.9)$$

Равенство (13.9) геометрически означает, что точка x лежит на прямой $\text{line}(z_j(\xi, \eta_{pq}))$. Вторая производная функции h равна

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} h_j(x, \xi, \eta_{pq}) = \varphi^{-1}(\eta_{pq}) \frac{\partial}{\partial \xi} H_j(x, \xi, \eta_{pq}) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi}(\xi, \eta_{pq}). \quad (13.10)$$

Так как $\text{supp } \lambda_j$ не содержит точек, в которых $\partial \varphi_j(\xi, \eta_{pq}) / \partial \xi = 0$, то вторая производная обращается в нуль только в случае, если $x \in L_{\eta_{pq}}^{(j)}$. Вне каустики можем применять лемму 13.1. Обратимся к двукратным интегралам в (13.3). Для этого введем в U_{jk} координаты (H, φ) , где $H = H(x(\psi_{jk}(\eta_{pq})), z)$, $\varphi = \varphi(z)$. Соответствующие уравнения для отыскания стационарных точек выглядят так:

$$\begin{aligned} (x - x(\psi_{jk}(\eta_{pq})), \eta(z)) - H &= 0, \\ \varphi - \varphi_{jk}(H, \eta_{pq}) &= 0. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Первое из уравнений (13.11) в силу тождества (1.3) можно записать как равенство $H(x, z) = 0$, которое означает, что $x \in \text{line}(z)$. Второе из уравнений (13.11) означает по определению φ_{jk} (см. (11.11)), что $z = z_j(\xi_{jk}(H, \eta_{pq}), \eta_{pq}) \in \Gamma_{\eta_{pq}}$. отождествим стационарную точку z_i двукратного интеграла со стационарной точкой ξ_i однократного интеграла исходя из равенства $z_j(\xi_i, \eta_{pq}) = z_i$. Определитель, который в условиях леммы 13.1 не должен равняться нулю, легко вычисляется. Он равен

$$\begin{aligned} \varphi^{-2}(\eta_{pq}) \begin{vmatrix} (x - x(\psi_{jk}(\eta_{pq})), \eta(z)) & 1 \\ 1 & -\frac{\partial \varphi_{jk}(H, \eta_{pq})}{\partial H} \end{vmatrix} = \\ = -\varphi^{-2}(\eta_{pq}) \frac{\partial H_j(x, \xi_{jk}(H, \eta_{pq}), \eta_{pq})}{\partial H}. \end{aligned} \quad (13.12)$$

Производная в правой части (13.12) отлична от нуля в стационарной точке, если x не лежит на каустике. Надо учесть, что $\partial \xi_{jk} / \partial H \neq 0$. Последнее следует из (11.9) и условия б) в он-

разделении области U_{jk} . Из (13.12) и (13.10) следует, что

$$\frac{p^{1/2}}{(2\pi p)^{1/2}} v_0^{(j)}(\xi_i, \eta_{pq}, \delta_{pq}) \sqrt{\left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} \right|} \sqrt{\left| \frac{2\pi}{h_j''(x, \xi_i)} \right|} =$$

$$= \frac{p}{2\pi p} v_0^{(j)}(\xi_i, \eta_{pq}, \delta_{pq}) \varphi^{-1/2}(\eta_{pq}) \sqrt{\left| \frac{\partial \xi_{jk}(H_i, \eta_{pq})}{\partial H} \right|} \frac{2\pi}{\sqrt{\det h''}},$$

т.е. амплитуды главных членов, соответствующих одной и той же стационарной точке в однократном и двукратном интегралах, с точностью до срезающих функций $\chi_j, \chi_{jk}, \hat{\chi}_j$ и $\hat{\chi}_j$ совпадают. Сравним фазы:

фаза однократного интеграла равна

$$2\pi p h_j(x, \xi_i) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} h_{j\xi}'' + 2\pi \delta_{pq} (h_j(x, \xi_i) - \xi_i) -$$

$$- \frac{\pi}{2} \operatorname{Ind}_j(\xi_0, \xi_i, \eta_{pq}) + \frac{\pi}{2} \pi_n \xi_i + \gamma_j, \quad (13.13)$$

фаза двукратного интеграла равна

$$2\pi p h_{jk}(x, z_i) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} h_{jk}'' + 2\pi \delta_{pq} (h_{jk}(x, z_i) - \xi_{jk}(z_i, \eta_{pq})) -$$

$$- \frac{\pi}{2} \operatorname{Ind}_j(\xi_0, \xi_{jk}(\eta_{pq}), \eta_{pq}) + \frac{\pi}{2} \pi_n \xi_{jk}(z_i, \eta_{pq}) + \gamma_j. \quad (13.14)$$

В силу равенства $z_j(\xi_i, \eta_{pq}) = z_i$ имеем $h_{jk}(x, z_i) = h_j(x, \xi_i)$ и $\xi_{jk}(z_i, \eta_{pq}) = \xi_i$. Кроме того, $\operatorname{sign} h_{j\xi}'' = \operatorname{sign}(H'_{j\xi} \varphi'_{j\xi})$, а $\operatorname{sign} h_{jk}''$ равен разности числа положительных и отрицательных собственных чисел матрицы (13.12). Так как определитель этой матрицы отрицателен, то разность равна нулю. Учитывая (11.14), получаем, что

$$\operatorname{Ind}_j(\xi_0, \xi_i, \eta_{pq}) = \operatorname{Ind}_j(\xi_0, \xi_{jk}(\eta_{pq}), \eta_{pq}) + \frac{\operatorname{sign} h_j''}{2}.$$

Мы видим, что обе фазы в точности совпадают. Эти два факта: совпадение фаз и совпадение амплитуд в первом приближении в членах, отвечающих одной и той же стационарной точке, позволяют объединить вклады от одной стационарной точки.

Обозначим общее значение фаз (13.13) и (13.14) символом $\tilde{\varphi}_j(x, \xi_i, p, q)$. Сформулируем результат вычисления $u_{pq}^{(j, \alpha)}$ в окрестности некаустической точки в виде леммы. Прежде введем условие (*), которое будем накладывать в некоторых случаях на тройку (x^*, η^*, α) , где $x^* \in \mathbb{R}^2$, $\eta^* \in E$, $\alpha = \{\hat{\chi}_j(\xi, \eta), \hat{\chi}_j(z)\}$:

(*) для любого $j=0, \dots, n-1$ равенство $z^* = (x_{\eta^*}^{(j)}(\xi), y_{\eta^*}^{(j)}(\xi))$ не имеет места ни при каком $\xi \in \text{supp } \hat{\chi}_j$ и ни при каком ξ из тех, для которых $z_j(\xi, \eta) \in \text{supp } \hat{\chi}_j$.

Условие (*) означает, что если точка z^* и лежит на касательной L_{η^*} , то на несущественной с точки зрения α ее части.

Пусть $W \subset E$. Обозначим Λ^W часть Λ , состоящую из всех $(p, q) \in \Lambda$, для которых $\eta_{pq} \in W$.

Лемма 13.2. Если тройка (z^*, η^*, α) удовлетворяет условию (*), то z^* и η^* обладают окрестностями V и W , такими, что равномерно по $z \in V$ и $(p, q) \in \Lambda^W$

$$u_{pq}^{(\alpha)}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_p \left(\sum_{s=0}^{j+1} A_{jps}(z, p, q) p^{-s} \right) \times \\ \times e^{i\tilde{\Phi}_j(z, \xi_{jp}, p, q)} + O(p^{-j-2}). \quad (13.15)$$

Здесь суммирование распространяется по всем решениям $\xi_{jp}(z, \eta_{pq})$ уравнения (13.9), принадлежащим носителю подынтегральных функций. Число этих решений конечно и ограничено сверху постоянными, не зависящими от $\eta_{pq} \in W$ и $z \in V$. Функции $\xi_{jp}(z, \eta)$ определены на $V \times W$ и принадлежат классу C^∞ . Коэффициенты при отрицательных степенях p в (13.15) имеет следующий вид:

$$A_{jps}(z, p, q) = \left| \frac{\partial}{\partial \xi} H_j(z, \xi, \eta_{pq}) \right|^{-1/2} \Big|_{\xi = \xi_{jp}} \times \\ \times \left\{ \chi_j \hat{\chi}_j(\xi_{jp}, \eta_{pq}) + \sum_k (\chi_{jk} \hat{\chi}_j)(z_j(\xi_{jp}, \eta_{pq})) \right\}, \quad (13.16)$$

при $s \geq 1$

$$A_{jps}(z, p, q) = A_{jpo}(z, p, q) v_s(\xi_{jp}, \eta_{pq}, \delta_{pq}) + \\ + \sum_{\substack{2\beta + \alpha \leq 2s \\ \beta < s}} D_{s\alpha\beta}^{(j)}(z, \xi_{jp}, \eta_{pq}, \delta_{pq}) \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} v_\beta^{(j)}(\xi_{jp}, \eta_{pq}, \delta_{pq}), \quad (13.17)$$

где $D_{s\alpha\beta}^{(j)}$ — полиномы по переменной δ_{pq} степени не выше $2s - 2\beta$, коэффициенты которых — гладкие функции, определенные на $V \times \bigcup_p \xi_{jp}(V \times W) \times W$. Эти функции зависят только от $h_j, h_{jk}, \chi_j, \chi_{jk}, \hat{\chi}_j$ и $\hat{\chi}_j$.

Лемма 13.2 дает достаточно детальное описание поведения $u_{pq}(\alpha x)$ в окрестности точки, не лежащей на каустике. Заметим, что в разложении для $u_{pq}^{(\alpha)}(x)$ появились полиномы по переменной δ_{pq} . Они произошли в результате дифференцирования $\exp\{i \times 2\pi \delta_{pq} (h_j(x, \xi) - \xi)\}$ в выражении (13.4) для $g_s^{(j)}$ и аналогичной экспоненты в (13.6).

§ 14. Оценка снизу нормы u_{pq}

В этом параграфе будет доказана теорема 13. В силу компактности множества E достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 14.1. Для любого $\eta^* \in E$ существует окрестность W точки η^* в E и положительная постоянная C , такие, что $\|u_{pq}\|_{L_2(\Omega)}^{-1} \leq C$, как только $\eta_{pq} \in W$ и $\sqrt{p^2 + q^2} \geq C$.

Доказательство. Так как каустика $L_{\eta^*} \subset \mathbb{R}^2$ имеет меру Лебега нуль, то существует точка αx^* , принадлежащая внутренности Ω , которая не лежит на каустике L_{η^*} . Возьмем в качестве α набор функций, тождественно равных единице. В этом случае тройка $(\alpha x^*, \eta^*, \alpha)$ удовлетворяет условию (*) и $u_{pq}^{(\alpha)}(\alpha x) = u_{pq}(x)$. Можем воспользоваться леммой 13.2 и утверждать существование окрестностей V точки αx^* и W точки η^* , таких, что при $\eta_{pq} \in W$ и $\alpha x \in V$ асимптотическая формула

$$u_{pq}(\alpha x) = \sum_{j, \rho} \left| \frac{\partial}{\partial \xi} H_j(\alpha x, \xi_{j\rho}(\alpha x), \eta_{pq}) \right|^{-1/2} e^{i \frac{2\pi p}{\phi(\eta_{pq})} S_j(\alpha x, \alpha_0, \xi_0, \xi_{j\rho}(\alpha x), \eta_{pq})} \times \\ \times e^{ib} + O(p^{-1}) \quad (14.1)$$

справедлива равномерно по $\alpha x \in V$, $(p, q) \in \Lambda^W$. Здесь b — гладкая вещественная функция, имеющая ограниченные производные любого порядка. Можно считать, что $\bar{V} \subset \Omega$. Фиксируем гладкую функцию $\psi(\alpha x)$ с носителем, содержащимся в V , такую, что $\psi(\alpha x^*) > 0$ и $0 \leq \psi(\alpha x) \leq 1$. Квадрат нормы в $L_2(\Omega)$ функции u_{pq} можно оценить снизу следующим образом, если воспользоваться представлением (14.1):

$$\begin{aligned}
\|u_{pq}\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \iint_{\Omega} |u_{pq}(x)|^2 dx dy \geq \int_V |u_{pq}(x) \psi(x)|^2 dx dy = \\
&= \sum_{j,j'} \sum_{\rho,\rho'} \iint e^{\frac{i2\pi\rho}{h(\eta_{pq})} [S_j(x, \xi_{j\rho}(x)) - S_{j'}(x, \xi_{j'\rho'}(x))]} \times \\
&\quad \times e^{iF_{j,j'}(x)} \left| \frac{\partial}{\partial \xi} H_j(x, \xi_{j\rho}(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} H_{j'}(x, \xi_{j'\rho'}(x)) \right|^{-1/2} \times \\
&\quad \times \psi^2(x) dx dy + O(p^{-1}). \tag{14.2}
\end{aligned}$$

Производные вещественной функции $F_{j,j'}$ в (14.2) ограничены постоянными, не зависящими от p, q . Для краткости выписаны лишь главные аргументы у функций S_j и H_j . Члены с $(\rho, j) = (\rho', j')$ в (14.2) очевидно допускают оценку снизу положительной постоянной, не зависящей от $(p, q) \in \Lambda$. Покажем, что члены с $(\rho, j) \neq (\rho', j')$ имеют порядок $O(p^{-1})$. Для этого оценим снизу величину

$$\begin{aligned}
&\nabla S_j(x, \xi_{j\rho}(x)) - \nabla S_{j'}(x, \xi_{j'\rho'}(x)) = \\
&= e_j(\xi_{j\rho}(x), \eta_{pq}) - e_{j'}(\xi_{j'\rho'}(x), \eta_{pq}). \tag{14.3}
\end{aligned}$$

Формула (14.3) является верной, так как результат дифференцирования $S_j(x, \xi)$ по ξ равен нулю в стационарной точке $\xi_{j\rho}(x)$ (равенство (13.9)). Рассмотрим в Σ координатную систему $(H(x^*, z), \varphi(z))$. Поскольку $H(x^*, z_{j'}(\xi_{j'\rho'}(x^*), \eta^*), \eta^*) = 0$, $H(x^*, z_j(\xi_{j\rho}(x^*), \eta^*)) = 0$ и $z_j(\xi_{j\rho}(x^*), \eta^*) \neq z_{j'}(\xi_{j'\rho'}(x^*), \eta^*)$, то $\varphi(z_j) \neq \varphi(z_{j'})$ и поэтому $e_j(\xi_{j\rho}(x^*), \eta^*) \neq e_{j'}(\xi_{j'\rho'}(x^*), \eta^*)$. Уменьшим окрестности V и W так, чтобы последнее неравенство выполнялось для всех $x \in V$ и $\eta \in W$ и по-прежнему $\text{supp } \psi \subset V$. Последнее можно достигнуть, изменив ψ , если надо. Получаем, что выражение $\nabla S_{j\rho} - \nabla S_{j'\rho'}$ ограничено снизу по модулю положительной постоянной при $(x, \eta_{pq}) \in V \times W$. Применяя к соответствующему члену в (14.2) лемму метода стационарной фазы для случая, когда нет стационарных точек, получаем требуемую оценку для него при $p \rightarrow +\infty$. ■

§ 15. Оценки $u_{pq}(x)$ на границе. Определение функций $v_s^{(j)}$ и α_s

В этом параграфе будет доказана теорема 12. Так как множество $E = E_{\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}} \cap [a, b]$ компактно и нигде не плотно, все построения достаточно провести локально по переменной η , т.е. для каждого $\eta^* \in E$ указать окрестность W точки η^* , в которой можно определить функции $v_s^{(j)}$ и α_s , так, чтобы равномерно по $x \in \partial\Omega$ и $(p, q) \in \Lambda^W$ выполнялась оценка (12.10). Воспользуемся методом стационарной фазы для того, чтобы вычислить значения $u_{pq}(x)$ на границе области Ω . Если точка не лежит вблизи каустики, то можем воспользоваться формулой (13.15). Если же x лежит в окрестности каустики, то совершим локальное преобразование Фурье вдоль границы. Этот прием использован в работе Д.Ш.Могилевского [31] для получения формул, описывающих отражение квазиклассических решений от границы при наличии каустики, выходящей на границу.

Окрестность W точки η^* фиксируем позже. А пока формулируем определение, которое зависит от этой окрестности. Пусть V обозначает пространство, элементами которого являются наборы

$$v = \{ v_s^{(j)}(\xi, \eta, \delta), 1 \leq s \leq \nu + 1, 0 \leq j \leq n-1 \},$$

где $v_s^{(j)}(\xi, \eta, \delta)$ — полином относительно переменной δ степени не выше $2s$, коэффициенты которого являются гладкими функциями (ξ, η) , определенными на $S^1 \times W$, A — пространство, элементами которого являются наборы $\{ \alpha_s(\eta, \delta), 1 \leq s \leq \nu + 1 \}$, где $\alpha_s(\eta, \delta)$ — полином относительно переменной δ степени не выше $2s$, коэффициенты которого также гладкие функции, заданные на W . В формулах § 12 для u_{pq} присутствует пока не определенный элемент (v, α) пространства $V \times A$. Будем указывать зависимость от (v, α) явно: $u_{pq}^{[v, \alpha]}(x)$. Наша задача — подобрать (v, α) так, чтобы для $u_{pq}^{[v, \alpha]}$ выполнялась оценка (12.10).

Пусть $\mathcal{D}_j(\eta)$ — множество точек "выхода" каустики $L_\eta^{(j)}$ на границу, т.е.

$$\mathcal{D}_j(\eta) = \{ x \in \partial\Omega : x = x(z), z \in \Gamma_j^{(s)} \cap \Gamma_\eta \}.$$

Из теоремы Сарда следует, что линейная мера Лебега множества $\mathcal{D}_j(\eta)$ при каждом $\eta \in E$ равна нулю. Если $x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{D}_j(\eta)$, то уравнение для отыскания стационарных точек $H_j(x, \xi, \eta) = 0$ имеет лишь конечное число решений $\xi_{j\rho}(x, \eta)$ и вторая производная фазовой функции $\partial H_j(x, \xi, \eta) / \partial \xi$ в этих точках отлична от нуля. В соответствующих точках $z_{j\rho}(x, \eta) = z_j(\xi_{j\rho}(x, \eta), \eta)$ кривая

$$B(x) = \{ z \in \Sigma : H(x, z) = 0 \} \quad (15.1)$$

трансверсально пересекается с $\Gamma_\eta^{(j)}$. Для каждого открытого интервала $I \subset \partial\Omega$ определим множество $B(I) = \bigcup_{x \in I} B(x)$. Если концы интервала I не принадлежат множеству $\mathcal{D}_j(\eta)$, то пересечение $B(I) \cap \Gamma_\eta^{(j)}$ есть сумма конечного числа непересекающихся открытых интервалов, концами которых являются точки вида $z_{j\rho}(x_{1,2}, \eta)$, где x_1 и x_2 — концы I . Удобно на $\Gamma_\eta^{(j)}$ ввести координату ξ по формуле $z = z_j(\xi, \eta)$. В терминах переменной ξ интервалы из $B(I) \cap \Gamma_\eta^{(j)}$ являются интервалами в S^1 , которые обозначим $\Delta_{j\rho}^I(\eta)$, $\rho = 1, 2, \dots, N_{jI}$.

Существует положительное число δ , обладающее свойством: для любого $z \in \bigcup_{j=0}^{n-1} \Sigma_j(\Pi_{a,b}^E)$ длина дуги $\partial\Omega$, заключенной между $x(z)$ и $x(\Gamma^{-1}z)$, больше δ . Будем называть открытый интервал $I \subset \partial\Omega$ допустимым, если:

- 1) длина интервала I меньше δ ;
- 2) концы интервала I не принадлежат множеству $\mathcal{D}_j(\eta^*)$, $0 \leq j \leq n-1$;

3) для каждого интервала вида $\Delta_{j\rho}^I(\eta^*)$ либо

$$\left| \frac{\partial s_j(\xi, \eta^*)}{\partial \xi} \right| > c_0(I) > 0 \text{ при всех } \xi \in \Delta_{j\rho}^I(\eta^*), \text{ либо}$$

$$\left| \frac{\partial \theta_j(\xi, \eta^*)}{\partial \xi} \right| > c_0(I) > 0 \text{ при всех } \xi \in \Delta_{j\rho}^I(\eta^*);$$

4) если существует $\xi \in \Delta_{j\rho}^I(\eta^*)$, для которого $\partial s_j(\xi, \eta^*) / \partial \xi = 0$, то множества $z_j(\Delta_{j\rho}^I(\eta^*), \eta^*)$ и $\Gamma^{-1}(z_j(\Delta_{j\rho}^I(\eta^*), \eta^*))$ не пересекаются с $\bigcup_k U_{jk}$.

Любая точка $x \in \partial\Omega$ содержится в сколь угодно малом допустимом интервале. Это следует из леммы II.1, свойства б) в определении множества U_{jk} и того факта, что мера Лебега $\mathcal{D}_j(\eta^*)$ равна нулю. Если будем мало изменять η^* , то число интервалов $\Delta_{j\rho}^I(\eta)$ не изменится и выполнение условий 1)–4) не

нарушится. Введем окрестность W_I точки η^* в E , обладающую тем свойством, что интервалы $\Delta_{j\rho}^I(\eta)$, $\eta \in W_I$ мало отличаются от $\Delta_{j\rho}^I(\eta^*)$ и условия 1)–4) выполняются, если заменить в них η^* на $\eta \in W_I$. Разобьем интервалы $\Delta_{j\rho}^I(\eta)$, $\rho = 1, \dots, N_{jI}$ на два класса. К первому классу отнесем интервалы, на которых $|\partial s_j(\xi, \eta) / \partial \xi| > c_0(I)$, ко второму – все остальные интервалы. Упомянутую малость отличия $\Delta_{j\rho}^I(\eta)$ от $\Delta_{j\rho}^I(\eta^*)$ будем считать такой, что принадлежность к первому или второму классу не зависит от $\eta \in W_I$. Если интервал I не пересекается с $\mathcal{Q}_j(\eta)$, то все интервалы $\Delta_{j\rho}^I(\eta)$, $\rho = 1, \dots, N_{jI}$, принадлежат к первому классу.

Пусть $W \subset W_I$. Рассмотрим множество (косое произведение)

$$X_{j\rho}^I(W) = \bigcup_{\eta \in W} \Delta_{j\rho}^I(\eta) \times \{\eta\} \subset \Pi_{\alpha, \delta}^E. \quad (15.2)$$

Из определения следует, что $X_{j\rho}^I(W) \cap X_{j\rho'}^I(W) = \emptyset$, если $\rho \neq \rho'$. Обозначим символом $V_{j\rho}^I$ пространство, элементами которого являются наборы $\{v_s(\xi, \eta, \delta), 1 \leq s \leq \nu+1\}$, где $v_s(\xi, \eta, \delta)$ – полином по δ степени не выше $2s$ с гладкими коэффициентами, заданными на $X_{j\rho}^I(W)$.

Лемма 15.1. Для каждого допустимого интервала существует набор операторов $\Theta_{j\rho}^I: V \times A \rightarrow V_{j\rho}^I$, $0 \leq j \leq n-1$, $1 \leq \rho \leq N_{jI}$, линейных по $v \in V$ и полилинейных по $\alpha \in A$, обладающих следующими свойствами:

1) если $\Theta_{j\rho}^I(v, \alpha) = 0$ при $0 \leq j \leq n-1$, $\rho = 1, \dots, N_{jI}$, то

$$\int_I |u_{pq}^{[v, \alpha]}| |\partial \Omega|^2 ds = O(p^{-\nu-2}) \text{ равномерно по } (p, q) \in \Lambda^W;$$

2) $\Theta_{j\rho}^I(v, \alpha) = \{ \Theta_{j\rho s}^I(v, \alpha), 1 \leq s \leq \nu+1 \}$,

где
$$\Theta_{j\rho s}^I(v, \alpha)(\xi, \eta, \delta) = v_s^{(j)}(\xi, \eta, \delta) - v_s^{(j-1)}(\xi, \eta, \delta) - i \alpha_s(\eta, \delta) [\mathcal{P}^{-1}(\eta) Q_j(\alpha_0, \xi_0, \eta)] + F_{j\rho s}^I(v, \alpha) \quad (15.3)$$

при $1 \leq j \leq n-1$ и

$$\Theta_{0\rho s}^I(v, \alpha)(\xi, \eta, \delta) = v_s^{(0)}(\xi, \eta, \delta) - v_s^{(n-1)}(\xi - \eta, \eta, \delta) - i \alpha_s(\eta, \delta) [\mathcal{P}^{-1}(\eta) Q_0(\alpha_0, \xi_0, \eta) + \eta] + F_{0\rho s}^I(v, \alpha); \quad (15.4)$$

операторы $F_{j\rho s}^I$ зависят только от $v_{s'}^{(j')}$ и $\alpha_{s'}$, с $s' < s$;

3) если $X_{j\rho_1}^{I_1}(W) \cap X_{j\rho_2}^{I_2}(W) \neq \emptyset$, что возможно лишь тогда, когда $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, то при любом $(v, \alpha) \in V \times A$:

а) $\Theta_{j\rho_1 s}^{I_1}(v, \alpha)$ и $\Theta_{j\rho_2 s}^{I_2}(v, \alpha)$ совпадают на $X_{j\rho_1}^{I_1}(W) \cap X_{j\rho_2}^{I_2}(W)$, если оба интервала $\Delta_{j\rho_1}^{I_1}$ и $\Delta_{j\rho_2}^{I_2}$ принадлежат первому классу,

$$\begin{aligned} \text{б) } \Theta_{j\rho_1 s}^{I_1}(v, \alpha)(\xi, \eta, \delta) &= \Theta_{j\rho_2 s}^{I_2}(v, \alpha)(\xi, \eta, \delta) + \\ &+ \sum_{s' < s} g_{s s' \rho_1 \rho_2}^{I_1 I_2}(\xi, \eta, \delta) \Theta_{j\rho_2 s'}^{I_2}(v, \alpha)(\xi, \eta, \delta) \end{aligned} \quad (15.5)$$

при $(\xi, \eta) \in X_{j\rho_1}^{I_1}(W) \cap X_{j\rho_2}^{I_2}(W)$, если $\Delta_{j\rho_1}^{I_1}$ принадлежит первому классу, а $\Delta_{j\rho_2}^{I_2}$ - второму. В выражении (15.5) $g_{s s' \rho_1 \rho_2}^{I_1 I_2}(\xi, \eta, \delta)$ - некоторые полиномы, коэффициенты которых определены на $X_{j\rho_1}^{I_1}(W) \cap X_{j\rho_2}^{I_2}(W)$ и не зависят от (v, α) .

Выведем сначала из леммы 15.1 утверждение теоремы-12. Для этого покроем $\partial\Omega$ конечным набором допустимых интервалов I_μ , $\mu = 1, \dots, M$, позаботившись о том, чтобы любой интервал I_μ , содержащий точки из $\bigcup_{j=0}^{n-1} \mathcal{Q}_j(\eta^*)$, пересекался только с теми интервалами $I_{\mu'}$, $\mu' \neq \mu$, которые точки данного множества не содержат. Этого нетрудно добиться, так как $\bigcup_{j=0}^{n-1} \mathcal{Q}_j(\eta^*)$ замкнуто и имеет меру нуль. Указанное ограничение на покрытие $\partial\Omega$ допустимыми интервалами необходимо для того, чтобы ограничиться двумя ситуациями а) и б), перечисленными в пункте 3) леммы 15.1. В качестве окрестности W точки η^* , о которой говорилось в начале параграфа, возьмем: $W = \bigcap_{1 \leq \mu \leq M} W_{I_\mu}$. Поскольку $W \subset W_{I_\mu}$, то при всех $\mu = 1, \dots, M$ определены формулами (15.2) множества $X_{j\rho}^{I_\mu}(W)$, и для каждого I_μ справедливо утверждение леммы 15.1 с данным W . Если пара (v, α) такова, что $\Theta_{j\rho}^{I_\mu}(v, \alpha) = 0$ при всех μ, j и ρ , то, как следует из леммы 15.1, последовательность $\|u_{p,q} | \partial\Omega\|_{L_2(\partial\Omega)}$ при $p \rightarrow +\infty$ имеет порядок $O(p^{-\nu-2})$ равномерно по $(p, q) \in \Lambda^W$. Будем последовательно определять $(v_{s'}, \alpha_{s'})$. Пусть уже найдены $v_{s'}, \alpha_{s'}$ с $s' < s$, причем $\Theta_{j\rho s'}^{I_\mu}(v, \alpha) = 0$ при всех $s' < s, \mu, j$ и ρ . Заметим, что $\Theta_{j\rho s'}^{I_\mu}(v, \alpha)$ зависит лишь от $v_{s''}, \alpha_{s''}$, с $s'' \leq s'$, поэтому эти функции не зависят от еще не найденных $v_{s''}, \alpha_{s''}$ с $s'' \geq s$. Определим v_s и α_s из условия $\Theta_{j\rho s}^{I_\mu}(v, \alpha) = 0$

при всех μ, j и ρ . Так как интервалы I_μ покрывают $\partial\Omega$, то $\bigcup_{\rho, \mu} X_{j\rho}^{I_\mu}(W) \supset \Pi_{\alpha, \delta}^W$. Поэтому система уравнений $\Theta_{j\rho s}^{I_\mu}(v, \alpha) = 0, 1 \leq \mu \leq M, 0 \leq j \leq n-1, 1 \leq \rho \leq N_{jI_\mu}$, эквивалента (в силу (15.3) и (15.4)) системе уравнений

$$v_s^{(j)}(\xi, \eta, \delta) - v_s^{(j-1)}(\xi, \eta, \delta) - i\alpha_s(\eta, \delta) [\mathcal{P}^{-1}(\eta) Q_j(\alpha_0, \xi_0, \eta)] + F_{js}(\xi, \eta, \delta) = 0, \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

$$v_s^{(0)}(\xi, \eta, \delta) - v_s^{(n-1)}(\xi - \eta, \eta, \delta) -$$

$$-i\alpha_s(\eta, \delta) [\mathcal{P}^{-1}(\eta) Q_0(\alpha_0, \xi_0, \eta) + \eta] + F_{0s}(\xi, \eta, \delta) = 0. \quad (15.6)$$

Равенства (15.6) должны выполняться при всех $(\xi, \eta, \delta) \in S^1 \times W \times \mathbb{R}^1$. Функции $F_{js}, 0 \leq j \leq n-1$ в (15.6) зависят от ранее определенных $v_{s'}$ и $\alpha_{s'}$, с $s' < s$. Они являются полиномами от переменной δ степени не выше $2s$, коэффициенты которых однозначно определены на $S^1 \times W$ и принадлежат классу C^∞ . Однозначность следует из условий согласования 3) леммы 15.1 и того факта, что $\Theta_{j\rho s'}^{I_\mu}(v, \alpha) = 0$ при $s' < s$.

Уравнения (15.6) устроены таким образом, что $v_s^{(j)}$ с $j=0, \dots, n-2$, однозначно определяются из первых $n-1$ уравнений по $v_s^{(n-1)}$ и α_s . Для определения последних сложим все уравнения (15.6). Получим уравнение

$$v_s^{(n-1)}(\xi, \eta, \delta) - v_s^{(n-1)}(\xi - \eta, \eta, \delta) = i\alpha_s(\eta, \delta) \left(\frac{Q(\eta)}{\mathcal{P}(\eta)} + \eta \right) - \sum_{j=0}^{n-1} F_{js}(\xi, \eta, \delta). \quad (15.7)$$

Следующая ниже лемма 15.2 утверждает, что необходимым и достаточным условием разрешимости (15.7) является равенство нулю интеграла от правой части по ξ . Отсюда определяется

$$\alpha_s(\eta, \delta) = \frac{\mathcal{P}(\eta)}{i(\mathcal{P}(\eta) + \eta \mathcal{P}'(\eta))} \int_0^1 \sum_{j=0}^{n-1} F_{js}(\xi, \eta, \delta) d\xi. \quad (15.8)$$

Лемма 15.2. Рассмотрим уравнение

$$f(\xi + \eta, \eta) - f(\xi, \eta) = F(\xi, \eta), \quad (15.9)$$

в котором переменная η пробегает множество $W \subset E_{\sigma, \sqrt{\epsilon}} \cap [a, b]$,

F — гладкая функция на $S^1 \times W$. Для того чтобы существовало решение f уравнения (15.9), принадлежащее классу $C^\infty(S^1 \times W)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_{S^1} F(\xi, \eta) d\xi = 0, \quad (15.10)$$

Доказательство. Условие (15.10) необходимо, что проверяется непосредственным интегрированием (15.9). С другой стороны, если оно выполнено, то решение (15.9) выписывается явно:

$$f(\xi, \eta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{\int_{S^1} e^{-i2\pi n\xi'} F(\xi', \eta) d\xi'}{e^{i2\pi n\eta} - 1} e^{i2\pi n\xi}. \quad (15.11)$$

Принадлежность правой части (15.11) классу $C^\infty(S^1 \times W)$ проверяется почленным дифференцированием. При этом надо учитывать неравенство

$$|e^{i2\pi n\eta} - 1| \geq 4\sqrt{\varepsilon} |n|^{-\sigma}, \quad (15.12)$$

оправдываем при $\eta \in E_{\sigma, \sqrt{\varepsilon}}$.

Лемма 15.2 гарантирует существование решения класса C^∞ . Мы видим, что $U_\alpha, \alpha_s, 1 \leq s \leq j+1$, можно последовательно определять так, что все $\Theta_{j\rho}^T(U, \alpha) = 0$.

Доказательство леммы 15.1. Введем обозначения

$$\begin{aligned} Z_{j\rho}^- &= \Sigma_j(X_{j\rho}^T(W)), & Z_{n\rho}^- &= Z_{0\rho}^-, \\ Z_{j\rho}^+ &= T^{-1}Z_{j+1,\rho}^-, & 0 \leq j &\leq n-1. \end{aligned}$$

Множества из списка

$$\{Z_{j\rho}^-, 1 \leq \rho \leq N_{j,T}; Z_{j\rho}^+, 1 \leq \rho' \leq N_{j+1,T}, 0 \leq j \leq n-1, N_{n,T} = N_{0,T}\}$$

попарно не пересекаются. Это следует из того, что: во-первых, множества $X_{j\rho}^T(W)$ при одинаковых j и разных ρ не пересекаются, во-вторых, в силу условия I) в определении допустимого интервала множества $Z_{j\rho}^-$ и $Z_{j\rho}^+$ проецируются (в координатах (s, θ)) на непересекающиеся участки оси s , в-третьих, множества $\Sigma_j(\Pi_{s,\theta}^T)$ при разных j не пересекаются. Можно даже утверждать, что замыкания всех перечисленных множеств не пересе-

даются. Построим набор гладких функций $\chi_{j\rho}^\pm$ на Σ с попарно непересекающимися носителями так, что: 1) $\chi_{j\rho}^\pm(z) = 1$ в некоторой окрестности замыкания $Z_{j\rho}^\pm$, 2) проекция каждого из множеств $\text{supp } \chi_{j\rho}^-$ и $T(\text{supp } \chi_{j-1,\rho}^+)$ на $\partial\Omega$ содержится в интервале, длина которого меньше $\delta^{j\rho}$, 3) если $\Delta_{j\rho}^I$ — интервал второго класса, то

$$\text{supp } \chi_{j\rho}^- \cap \bigcup_k U_{j,k} = \emptyset \quad \text{и} \quad \text{supp } \chi_{j-1,\rho}^+ \cap \bigcup_k U_{j-1,k} = \emptyset$$

(в силу условия 4) в определении допустимого интервала это возможно).

Пусть $\alpha_{j\rho}^\pm$ — набор вида $\{\hat{\chi}_{j'}(\xi, \eta), \hat{\chi}_{j'}(z), 0 \leq j' \leq n-1\}$, в котором $\hat{\chi}_{j'} = \hat{\chi}_{j'} = 0$ при $j' = j$ и $\hat{\chi}_j(z) = \chi_{j\rho}^\pm(z)$, $\hat{\chi}_j(\xi, \eta) = \chi_{j\rho}^\pm(z_j(\xi, \eta))$, $\alpha^{\text{ост}}$ — набор $\{\chi_j^{\text{ост}}(z_j(\xi, \eta)), \chi_j^{\text{ост}}(z), 0 \leq j \leq n-1\}$, где

$$\chi_j^{\text{ост}}(z) = 1 - \sum_{\rho} \chi_{j\rho}^+(z) - \sum_{\rho} \chi_{j\rho}^-(z). \quad (15.13)$$

Введем обозначения

$$u_{j\rho}^\pm(x) = u_{pq}^{(\alpha_{j\rho}^\pm)}(x), \quad u^{(\text{ост})}(x) = u_{pq}^{(\alpha^{\text{ост}})}(x).$$

Ясно, что

$$u_{pq}(x) = \sum_{j,\rho} u_{j\rho}^+(x) + \sum_{j,\rho} u_{j\rho}^-(x) + u^{(\text{ост})}(x). \quad (15.14)$$

Заметим, что любая тройка $(x, \eta, \alpha^{\text{ост}})$, где $x \in \bar{I}$, $\eta \in \bar{W}$, удовлетворяет (*). Докажем это. Если $x = (x_\eta^{(j)}(\xi), y_\eta^{(j)}(\xi)) \in \bar{I}$ для некоторого ξ , то либо $x = x(z_j(\xi, \eta))$, либо $x = x(Tz_j(\xi, \eta))$, поскольку именно эти два решения имеет первое из уравнений (II.5), рассматриваемое относительно $x \in \partial\Omega$ при фиксированных ξ и η . Так как $x \in \bar{I}$, то $z_j(\xi, \eta)$ (соответственно $Tz_j(\xi, \eta)$) принадлежит одному из множеств $Z_{j\rho}^-$ (соответственно $Z_{j+1,\rho}^-$). Поэтому $z_j(\xi, \eta)$ в любом случае принадлежит $(\bigcup_{\rho} Z_{j\rho}^-) \cup (\bigcup_{\rho} Z_{j\rho}^+)$, а в некоторой окрестности этого множества функция $\chi_j^{\text{ост}}$ равна нулю. Поскольку первое из уравнений (II.5) есть уравнение для стационарных точек, то предыдущее рассуждение показывает, что стационарных точек в $\text{supp } \chi_j^{\text{ост}}$ не будет вовсе. Из леммы 13.2 в таком случае следует, что $u^{(\text{ост})}(x) = O(\rho^{j-2})$ равномерно по $x \in \bar{I}$ и $(p, q) \in \Lambda^W$.

Рассмотрим остальные члены в сумме (15.14). Порознь они не обязаны быть малыми. Потребуем, чтобы они попарно сокращали (с точностью до $O(p^{-\nu-2})$) друг друга, а именно: член, отвечающий $z_{j\rho}^-$, должен сокращаться с членами, отвечающими $z_{j-1,\rho}^+ = T^{-1} z_{j\rho}^-$. Другими словами, потребуем, чтобы выполнялось

$$\left(\int_x |u_{j\rho}^-(x_0(s)) + u_{j-1,\rho}^+(x_0(s))|^2 ds \right)^{1/2} = O(p^{-\nu-2}) \quad (15.15)$$

равномерно по $(p, q) \in \Lambda^N$. Соотношение (15.15) можно интерпретировать как отражение волны $u_{j-1,\rho}^+$ от границы. В результате этого отражения она переходит в $u_{j\rho}^-$.

Дальнейшие рассуждения не зависят от того, что (p, q) пробегает часть целочисленной решетки. Сами выражения $u_{j\rho}^-$ и $u_{j-1,\rho}^+$ определены при всех $\eta_{pq} \in W$, $x \in I$, $\delta_{pq} \in \mathbb{R}^1$. Заменяем η_{pq} на η , δ_{pq} на δ , считая, что η пробегает \bar{W} , δ меняется в ограниченном интервале; p будем считать большим положительным параметром. Зависимость от q при этом пропадает, поскольку иначе, как через δ_{pq} и η_{pq} , оно в выражение для $u_{pq}(x)$ не входит.

Рассмотрим отдельно случаи, в которых интервал $\Delta_{j\rho}^I$ принадлежит к первому или второму классу.

Случай интервала первого класса. Нетрудно показать, что для $x \in \bar{I}$ и $\eta \in \bar{W}$ тройка $(x, \eta, \alpha_{j\rho}^\pm)$ удовлетворяет условию (*). Здесь

$$j' = \begin{cases} j & \text{в случае знака „-“,} \\ j-1 & \text{в случае знака „+“, } j \geq 1, \\ n-1 & \text{в случае знака „+“, } j=0. \end{cases} \quad (15.16)$$

Более того, носители подынтегральных функций для $u_{j\rho}^\pm$ в этом случае содержат ровно по одной стационарной точке. Обозначим эти стационарные точки $\xi_{j\rho}^\pm(x, \eta)$ (для однократного интеграла). Выполнены соотношения

$$z_j(x, \xi_{j\rho}^-(x, \eta), \eta) = T z_{j-1}(x, \xi_{j-1,\rho}^+(x, \eta), \eta), \quad (15.17)$$

$$\xi_{j-1,\rho}^+(x, \eta) = \xi_{j\rho}^-(x, \eta), \quad 1 \leq j \leq n-1, \quad (15.18)$$

$$\xi_{n-1}^+(x, \eta) = \xi_{0\rho}^-(x, \eta) - \eta.$$

Функции $\xi_{j',\rho}^{\pm}(z, \eta)$ заданы в некоторой окрестности множества $\bar{I} \times \bar{W}$ и принадлежат классу C^{∞} . Кроме того, $\chi_{j',\rho}^{\pm}(z_{j',\rho}(\xi_{j',\rho}^{\pm}(z, \eta), \eta)) = 1$ в некоторой окрестности $\bar{I} \times \bar{W}$. Равенство (II.2) и условие 3) в определении допустимого интервала показывает, что стационарные точки $\xi_{j',\rho}^{\pm}$ являются невырожденными. Применим к $u_{j',\rho}^{\pm}$ лемму 13.2. Возникнут две разложения вида (13.15):

$$u_{j',\rho}^{\pm}(z) = A_{j',\rho}^{\pm} e^{i\psi_{j',\rho}^{\pm}} \left\{ 1 + \sum_{s=1}^{j+1} p^{-s} \left[v_s^{(j')\pm}(\xi_{j',\rho}^{\pm}, \eta, \delta) + \alpha_s(\eta, \delta) (h_{j',\rho}(z, \xi_{j',\rho}^{\pm}) - \xi_{j',\rho}^{\pm}) + F_s^{(j')\pm} \right] \right\} + O(p^{-j-2}). \quad (15.19)$$

Здесь согласно выражениям (13.13), (13.16) и (13.17)

$$A_{j',\rho}^{\pm} \approx \left| \frac{\partial}{\partial \xi} H_{j',\rho}(z, \xi, \eta) \right|^{-1/2} \Big|_{\xi = \xi_{j',\rho}^{\pm}(z, \eta)}, \quad (15.20)$$

$$\psi_{j',\rho}^{\pm} = 2\pi \rho h_{j',\rho}(z, \xi_{j',\rho}^{\pm}) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \frac{\partial H_{j',\rho}(z, \xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_{j',\rho}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \Big|_{\xi = \xi_{j',\rho}^{\pm}} + 2\pi \delta (h_{j',\rho}(z, \xi_{j',\rho}^{\pm}) - \xi_{j',\rho}^{\pm}) - \frac{\pi}{2} \operatorname{Ind}_{j',\rho}(\xi_0, \xi_{j',\rho}^{\pm}, \eta) + \frac{\pi}{2} \pi_n \xi_{j',\rho}^{\pm} + \gamma_j, \quad (15.21)$$

$$F_s^{(j')\pm} = \sum_{\substack{2\rho + \alpha \leq 2s \\ \rho < s}} D_{\alpha\rho}^{(j')\pm}(z, \xi_{j',\rho}^{\pm}, \eta, \delta) \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}} v_{\rho}^{(j')\pm}(\xi_{j',\rho}^{\pm}, \eta, \delta). \quad (15.22)$$

Оценка (15.19) равномерна по $(z, \eta) \in \bar{I} \times \bar{W}$. Из равенства (II.3) следует, что $A_{j',\rho}^{-} = A_{j-1,\rho}^{+}$. Используя (6.6), (II.18), (15.18) и (12.7), получаем, что

$$\psi_{j-1,\rho}^{+} - \psi_{j,\rho}^{-} = -\pi, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ \psi_{n-1,\rho}^{+} - \psi_{0,\rho}^{-} = 2\pi(p+\delta) \frac{Q(\eta)}{\mathcal{P}(\eta)} + (n-1)\pi + \left(2\pi\delta - \frac{\pi}{2} \pi_n \right) \eta + \frac{\pi}{2} \tau(\eta). \quad (15.23)$$

Правая часть второго равенства (15.23) равна $2\pi(q-1/2)$, если $\delta = \delta_{pq}$, $\eta = \eta_{pq}$ (см. формулу (12.9)).

Положим $\Theta_{j\rho s}^I(u, \alpha)$ равным разности выражений в квадратных скобках в (15.19), взятых для знаков $-$ и $+$. Таким образом определенное $\Theta_{j\rho s}^I(u, \alpha)$ имеет вид (15.3), (15.4). Равенство амплитуд и фазовые соотношения (15.23) показывают, что обращения в нуль $\Theta_{j\rho s}^I(u, \alpha)$ при $s=1, 2, \dots, \nu+1$ достаточно для выполнения (15.15).

Если два множества $X_{j\rho_1}^{I_1}(W)$ и $X_{j\rho_2}^{I_2}(W)$ пересекаются и соответствующие интервалы $\Delta_{j\rho_1}^{I_1}$ и $\Delta_{j\rho_2}^{I_2}$ принадлежат к первому классу, то выражения для $u_{j\rho_i}^\pm(x)$, $i=1, 2$, различаются только наличием разных срезавших множителей $\chi_{j\rho_i}^\pm$. Поскольку эти множители в окрестностях стационарных точек (при $x \in I_1 \cap I_2$) равны единице, то соответствующие разложения (15.19) являются асимптотическими разложениями фактически одного и того же интеграла, разность имеет порядок $O(p^{-\nu-2})$. В силу единственности асимптотического разложения они совпадают. Поэтому верно утверждение 3а) доказываемой леммы.

Случай интервала второго класса. Расширим слегка интервал I , построив интервал $\tilde{I} \supset I$ так, чтобы он был допустимым и проекция множества, на которых $\chi_{j\rho}^\pm(x)=1$ на $\partial\Omega$, покрывала бы \tilde{I} каждая в отдельности. Построим гладкую функцию $\alpha(s)$, такую, что $\alpha(s)=1$ при $x_0(s) \in I$ и $\alpha(s)=0$ при $x_0(s) \notin \tilde{I}$ ($x = x_0(s)$ — уравнение $\partial\Omega$). Совершим преобразование Фурье подынтегральной функции в левой части (15.15), положив

$$u_{j\rho}(\beta) = \sqrt{p} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi p^{-1}(\eta) p \beta s} \alpha(s) (u_{j\rho}^-(x_0(s)) + u_{j-1\rho}^+(x_0(s))) ds. \quad (15.24)$$

Двукратные интегралы, входящие в выражения для $u_{j\rho}^\pm$, в этом случае равны нулю в силу свойства 3) срезавших функций $\chi_{j\rho}^\pm$. Таким образом, выражение (15.24) представляет собой сумму двух двукратных интегралов, в которых применим метод стационарной фазы. Точки стационарной фазы удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \beta + (\tau(s), e_{j\rho}(\xi, \eta)) &= 0, \\ H_{j\rho}(x_0(s), \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi_j(\xi, \eta) &= 0. \end{aligned} \quad (15.25)$$

Второе уравнение показывает, что прямая $line(z_j(\xi, \eta))$ должна проходить через точку $x_0(s)$ (в рассматриваемой ситуации $d\varphi_{j'}/d\xi \neq 0$), первое уравнение фиксирует $\cos \vartheta_{j'}(\xi, \eta)$. Пусть $\tilde{\Delta}_{j\rho}(\eta) = \cos \vartheta_{j'}(\Delta_{j\rho}^{\tilde{I}}(\eta))$. Из условия 3) в определении допустимого интервала следует, что $\tilde{\Delta}_{j\rho}(\eta) \subset]-1, 1[$ — открытый интервал и что каждый из рассматриваемых интегралов при $\beta \in \tilde{\Delta}_{j\rho}(\eta)$ содержит ровно одну стационарную точку, принадлежащую носителю подынтегральной функции. Обозначим эти точки $(s_{j\rho}(\beta, \eta), \xi_{j\rho}^{\pm}(\beta, \eta))$. Координата $s_{j\rho}(\beta, \eta)$ одна и та же для $\xi_{j\rho}^+$ и $\xi_{j\rho}^-$ числа $\xi_{j\rho}^{\pm}$ связаны соотношением (15.18). При $\beta \notin \tilde{\Delta}_{j\rho}(\eta)$ стационарных точек, как это следует из (15.25), нет вовсе. Поэтому при этих β равномерно по β , $x_0(s) \in \tilde{I}$, $\eta \in W$

$$u_{j\rho}(\beta) = O\left(p^{-\nu-2} \frac{1}{1+\beta^2}\right). \quad (15.26)$$

Пусть $\beta \in \tilde{\Delta}_{j\rho}(\eta)$. Вычисления дают следующее выражение для определителя матрицы из частных производных левых частей (15.25):

$$J_{j'}^{\pm} = \pm \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi_{j'}(\xi_{j\rho}^{\pm}, \eta) \sin^2 \vartheta_{j'}(\xi_{j\rho}^{\pm}, \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} \vartheta_{j'}(\xi_{j\rho}^{\pm}, \eta). \quad (15.27)$$

В силу условия 3) в определении допустимого интервала и свойства 3) функции $\chi_{j\rho}^{\pm}$ правая часть (15.27) не обращается в нуль, т.е. стационарные точки $(s_{j\rho}(\beta, \eta), \xi_{j\rho}^{\pm}(\beta, \eta))$ невырожденные, и к интегралам в (15.24) применима лемма 13.1. Соответствующая сигнатура квадратичных форм, как показывает несложные вычисления, в данном случае равна нулю. Из выражения (15.27) следует, что медленно меняющиеся множители в стационарных выражениях для двух рассматриваемых интегралов совпадают. Вычисление разности фаз для данного случая дает в точности тот же результат, что и в случае первого интервала, а именно формулу (15.23). Отсюда следует, что главные члены в $u_{j\rho}(\beta)$ сокращают друг друга. Применяя метод стационарной фазы к (15.24), при $\beta \in \tilde{\Delta}_{j\rho}(\eta)$ получаем

$$u_{j\rho}(\beta) = \frac{1}{|\sin \vartheta_{j'}(\xi_{j\rho}^-)| \sqrt{|\partial \vartheta_{j'}(\xi_{j\rho}) / \partial \xi|}} e^{i\psi_{j\rho} x} \times \sum_{s=1}^{\nu+1} p^{-s} \Theta_{j\rho s}^I(u, \alpha)(\xi_{j\rho}^-, \eta, \delta) + O(p^{-\nu-2}), \quad (15.28)$$

где $\Theta_{j\rho s}^I(u, \omega)$ имеет вид (15.3). Функция $u_{j\rho}^-(x) + u_{j-1, \rho}^+(x)$ при $x \in I$ восстанавливается через $u_{j\rho}(\beta)$ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$u_{j\rho}^-(x_0(s)) + u_{j-1, \rho}^+(x_0(s)) = \frac{\sqrt{\rho}}{\varphi(\eta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi\rho^{-1}(\eta)\rho\beta s} u_{j\rho}(\beta) d\beta. \quad (15.29)$$

Если все $\Theta_{j\rho s}^I(u, \omega) = 0$, то из равенств (15.28) и (15.26) следует требуемая оценка (15.15), так как преобразование Фурье не меняет нормы в L_2 .

Пусть множество $X_{j\rho}^I(W)$ пересекается с $X_{j\rho_1}^{I_1}(W)$ и интервал $\Delta_{j\rho_1}^{I_1}$ принадлежит первому классу. Рассмотрим при $z = x_0(s) \in I \cap I_1$ функции $\tilde{f}(s) = \tilde{u}_{j\rho}^-(x_0(s)) + \tilde{u}_{j-1, \rho}^+(x_0(s))$ и $f(s) = u_{j\rho_1}^-(x_0(s)) + u_{j-1, \rho_1}^+(x_0(s))$, где $\tilde{u}_{j\rho}^\pm$ получается из $u_{j\rho}^\pm$ подстановкой в подынтегральные выражения дополнительных множителей $\chi_{j\rho_1}^\pm$. Так как интегралы, входящие в выражения для f и \tilde{f} , содержат ровно по одной стационарной точке и функции $\chi_{j\rho_1}^\pm$ в окрестности этих точек равны единице, то коэффициенты в разложениях по степеням ρ^{-1} для этих интегралов должны совпадать. Для вычисления функций $\tilde{f}(s)$ можно применить метод стационарной фазы и однократному интегралу (15.29), предварительно подставив в него разложение (15.28). В стационарных точках фазы и медленно меняющиеся множители у $f(s)$ и $\tilde{f}(s)$ совпадают. Приравняв коэффициенты в разложениях $f(s)$ и $\tilde{f}(s)$, получаем утверждение 3б) леммы. ■

§ 16. План доказательства теоремы 14.

Случай близких собственных чисел

Фиксируем положительные постоянные C_0 и C_1 и разобьем множество $\Lambda \times \Lambda$, пробегаемое целочисленным вектором (p_1, q_1, p_2, q_2) , на следующие части:

$$\mathcal{D}_0 = \{(p_1, q_1, p_2, q_2) \in \Lambda \times \Lambda : (p_1, q_1) = (p_2, q_2)\},$$

$$\mathcal{D}_1 = \{(p_1, q_1, p_2, q_2) \in \Lambda \times \Lambda : |\sqrt{\lambda_{p_1 q_1}} - \sqrt{\lambda_{p_2 q_2}}| \geq C_0 \rho^{-\nu+1}\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \left\{ (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \Lambda \times \Lambda : \left| \sqrt{\lambda_{p_1 q_1}} - \sqrt{\lambda_{p_2 q_2}} \right| < C_0 p^{-\nu+1}, \left| \eta_{p_1 q_1} - \eta_{p_2 q_2} \right| \geq C_1 p^{-\frac{1}{2}} \right\},$$

$$\mathcal{D}_3 = \Lambda \times \Lambda \setminus \left(\bigcup_{i=0}^2 \mathcal{D}_i \right).$$

В этих определениях и в дальнейшем $p = \min\{p_1, p_2\}$. Нужно доказать оценку (12.12) при $(p_1, q_1, p_2, q_2) \in \Lambda \times \Lambda \setminus \mathcal{D}_0 = \bigcup_{1 \leq i \leq 3} \mathcal{D}_i$.

Чрезвычайно просто доказывается эта оценка для случая $(p_1, q_1, p_2, q_2) \in \mathcal{D}_1$: надо лишь применить обычные рассуждения, доказывающие ортогональность собственных функций, к квазиמודам. Действительно, пары $(u_{p_i q_i}, \lambda_{p_i q_i})$ точно удовлетворяют уравнению (12.2) и приближенно краевому условию. Пусть $\partial/\partial n$ — производная по нормали к границе Ω . Наряду с оценкой (12.10) имеет место оценка

$$\left\| \frac{\partial}{\partial n} u_{pq} \Big|_{\partial \Omega} \right\|_{L_2(\partial \Omega)} = \tilde{O}(p). \quad (16.1)$$

Для доказательства (16.1) надо учесть, что выражение для $\frac{\partial u_{pq}(x_0(s))}{\partial n}$ отличается от выражения для $u_{pq}(x_0(s))$ только наличием дополнительных множителей: $i\sqrt{\lambda_{pq}} \sin \vartheta_j(\xi, \eta)$ в подынтегральных выражениях однократных интегралов и $i\sqrt{\lambda_{pq}} \sin \vartheta(z)$ в двукратных. Применяя к этим выражениям все рассуждения предыдущего параграфа, находим, что ввиду наличия указанных множителей сокращения членов асимптотического разложения не происходит, но старший член (оцениваемый в окрестности каустик на границе через преобразование Фурье) имеет порядок $O(\sqrt{\lambda_{pq}}) = O(p)$.

Применим к функциям $u_{p_i q_i}$ формулу Грина и воспользуемся оценками (12.10), (16.1) и равенством (12.2):

$$\begin{aligned} & (\lambda_{p_1 q_1} - \lambda_{p_2 q_2}) (u_{p_1 q_1}, u_{p_2 q_2}) = \\ & = \int_{\partial \Omega} \left(\frac{\partial \bar{u}_{p_2 q_2}}{\partial n} u_{p_1 q_1} - \frac{\partial u_{p_1 q_1}}{\partial n} \bar{u}_{p_2 q_2} \right) ds = O(p^{-\nu-1}) \quad (16.2) \end{aligned}$$

Из (16.2) сразу следует оценка (12.12) в области \mathcal{D}_1 .

Подобные рассуждения, однако, неприменимы в областях \mathcal{D}_2 и \mathcal{D}_3 ввиду того, что там собственные числа близки. Опшем кратко основные идеи доказательства оценок скалярных произведений в этих случаях.

Если $(p_1, q_1, p_2, q_2) \in \mathcal{D}_2$, воспользуемся асимптотикой $u_{p_i q_i}(x)$ при $p \rightarrow \infty$, полученной методом стационарной фазы.

В этом случае произведение $u_{p_1 q_1}(x) \bar{u}_{p_2 q_2}(x)$ — является быстро осциллирующей функцией переменной x , и поэтому скалярное произведение мало. Быстрые осцилляции получаются ввиду того, что угол между направлениями осцилляций у функций $u_{p_1 q_1}$ и $u_{p_2 q_2}$ допускает оценку снизу. В случае $(p_1, q_1, p_2, q_2) \in \mathcal{D}_3$ внесем в исходную задачу малое формально самосопряженное возмущение. Для возмущенной задачи построим прежним способом "возмущенные" квазимоды $\tilde{u}_{p_i q_i}(x)$ и собственные числа $\tilde{\lambda}_{p_i q_i}$, $i = 1, 2$. Возмущение подберем таким образом, чтобы для возмущенных собственных чисел выполнялась оценка

$$\left| \sqrt{\tilde{\lambda}_{p_1 q_1}} - \sqrt{\tilde{\lambda}_{p_2 q_2}} \right| \geq \text{const} \cdot p^{-\nu+1}. \quad (16.3)$$

Рассуждая так же, как и в случае области \mathcal{D}_1 , получаем приближенную ортогональность $\tilde{u}_{p_i q_i}(x)$. Утверждение о невозмущенных квазимодах получается теперь в силу того, что они мало отличаются от возмущенных.

§ 17. Локальная лемма об ортогональности.

Оценки в области \mathcal{D}_2

В области \mathcal{D}_2 приближенная ортогональность функций $u_{p_1 q_1}$ и $u_{p_2 q_2}$ является следствием того, что направления осцилляций у этих функций не совпадают, и поэтому ортогональность имеет локальный характер, который точно формулируется в нижеприведенной лемме. Пусть $W \subset E \times E$. Будем обозначать \mathcal{D}_2^W часть \mathcal{D}_2 , состоящую из всех $(p_1, q_1, p_2, q_2) \in \mathcal{D}_2$, для которых $(\eta_{p_1 q_1}, \eta_{p_2 q_2}) \in W$.

Лемма 17.1. Пусть $(\eta_1^*, \eta_2^*) \in E \times E$ и $x^* \in \bar{\Omega}$. Существуют окрестность V точки x^* в \mathbb{R}^2 и окрестность W точки (η_1^*, η_2^*) в $E \times E$, обладающие следующим свойством:

(*) для любой гладкой функции $\psi(x)$, носитель которой содержится в V , равномерно по $(p_1, q_1, p_2, q_2) \in \mathcal{D}_2^W$ справедлива оценка

$$\iint_{V \cap \Omega} u_{p_1 q_1}(x) \overline{u_{p_2 q_2}(x)} |\psi(x)|^2 dx dy = O(p^{-2}). \quad (17.1)$$

Из леммы 17.1 нетрудно вывести оценку (12.12) в области \mathcal{D}_2 , покрывая $E \times E$ окрестностями W и устраивая для каждой такой окрестности конечное разбиение единицы из функций ψ^2 . Остальная часть этого параграфа посвящена доказательству леммы 17.1. Введем для удобства сокращенные обозначения $u_{p_i q_i}(\infty) = u_i(\infty)$, $\eta_{p_i q_i} = \eta_i$, $i = 1, 2$, и т.п. Используя формулы (12.3) и (12.4), представим левую часть (17.1) в виде

$$(u_1 \psi, u_2 \psi) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{j'=0}^{n-1} \left\{ (\hat{u}_1^{(j)} \psi, \hat{u}_2^{(j')} \psi) + (\hat{u}_1^{(j)} \psi, \hat{u}_2^{(j'+1)} \psi) + (\hat{u}_1^{(j)} \psi, \hat{u}_2^{(j')} \psi) + (\hat{u}_1^{(j)} \psi, \hat{u}_2^{(j'+1)} \psi) \right\}. \quad (17.2)$$

Символами $\hat{u}_{1,2}^{(j)}$ обозначены однократные интегралы в (12.4), $\hat{u}_{1,2}^{(j)}$ — суммы двукратных интегралов.

Для оценки членов в (17.2) будем применять следующую лемму метода стационарной фазы. В ее формулировке X — произвольное множество, пробегаемое параметром σ .

Лемма 17.2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с гладкой границей $\partial\Omega$, $h(\infty, \sigma, p)$ и $g(x, \sigma, p)$ — функции переменных $x \in \mathbb{R}^m$, $\sigma \in X$, $p \geq 0$, удовлетворяющие условиям:

1) при каждом σ и p функции h и g имеют производные по x до четвертого порядка включительно, ограниченные постоянными, не зависящими от σ и p ;

2) при каждом σ и p функция $g(\cdot, \sigma, p)$ — финитная, причем $\text{supp } g(\cdot, \sigma, p) \subset X$, где X — компактное множество, не зависящее от σ и p ;

3) h — вещественная функция, и при каждом $x \in \text{supp}(\cdot, \sigma, p)$

$$|\text{grad}_x h| \geq c p^{-1/2}, \quad (17.3)$$

если x — внутренняя точка Ω , и

$$|(\text{grad}_x h, \tau(x))| \geq c p^{-1/2}, \quad (17.4)$$

если $x \in \partial\Omega$ и $\tau(x)$ — любой касательный к $\partial\Omega$ в точке x вектор единичной длины. В (17.3) и (17.4) c — положительная

постоянная, не зависящая от σ и p . Тогда равномерно по $\sigma \in X$

$$\int_{\Omega} e^{i\rho h(x, \sigma, p)} g(x, \sigma, p) dx = O(p^{-2}).$$

Оценка $(\hat{u}_1^{(j)} \psi, \hat{u}_2^{(j)} \psi)$. Положим в наборе σ (см. §13) функции $\hat{\chi}_j = 1$, а остальные функции равными нулю. Тогда получим $u_{p_i q_i}^{(\sigma)} = \hat{u}_i^{(j)}$. Условие б) в определении окрестностей $\{j, k$ (см. §11) показывает, что тройка (x^*, η^*, σ) удовлетворяет условию (*), если $x \in \bar{\Omega}$. Поэтому для $\hat{u}_i^{(j)}$ верно представление (13.15) в некоторой окрестности пары (x^*, η_i^*) . Скалярное произведение, которое хотим оценить, можно представить (выбрав подходящие окрестности V и W) в виде конечной суммы интегралов типа

$$\iint_{\partial V} e^{i\sqrt{\lambda} x} \{S_j(x, x_0, \xi_0, \xi_{j\rho}(x, \eta_1), \eta_1) - S_{j'}(x, x_0, \xi_0, \xi_{j'\rho}(x, \eta_2), \eta_2)\} \times \\ \times A(x, p_1, q_1, p_2, q_2) \psi^2(x) dx dy + O(p^{-2}), \quad (17.5)$$

где $\lambda = 1/2 (\lambda_{p_1 q_1} + \lambda_{p_2 q_2})$, A - гладкая функция. Нетрудно убедиться в том, что подынтегральное выражение в (17.5) удовлетворяет условиям 1) и 2) леммы 17.2. Проверим условие 3). Нужно оценить снизу величину

$$\nabla S_j - \nabla S_{j'} = e_j(\xi_{j\rho}(x, \eta_1), \eta_1) - e_{j'}(\xi_{j'\rho}(x, \eta_2), \eta_2). \quad (17.6)$$

Поскольку точки $z_{j\rho}(x, \eta_1)$ и $z_{j'\rho}(x, \eta_2)$ лежат на кривой $B(x)$ (см. формулу (15.1)), а эта кривая в рассматриваемом случае пересекается с Γ_{η_1} и Γ_{η_2} трансверсально, и оценка для углов пересечения равномерная (что следует из соображений компактности), то разность, стоящая в правой части (17.6), оценивается по модулю снизу через расстояние между кривыми Γ_{η_1} и Γ_{η_2} , которое не меньше $\text{const} \cdot p^{-1/2}$ (см. определение множества \mathcal{D}_2). Пусть теперь $x \in \partial\Omega$. В этом случае

$$(e_j(\xi_{j\rho}(x, \eta_1), \eta_1) - e_{j'}(\xi_{j'\rho}(x, \eta_2), \eta_2), \tau(x)) = \\ = \cos \vartheta_j(\xi_{j\rho}(x, \eta_1), \eta_1) - \cos \vartheta_{j'}(\xi_{j'\rho}(x, \eta_2), \eta_2).$$

Поскольку (s, ϑ) - координатная система в Σ и $s(z_j(\xi_{j\rho}, \eta_1)) = s(z_{j'}(\xi_{j'\rho}, \eta_2))$, то предыдущие рассуждения показывают, что рассматриваемая проекция оценивается снизу по модулю величиной

$\text{const} \cdot p^{-1/2}$. Мы находимся в условиях применимости леммы 17.2, которая дает требуемую оценку для интегралов (17.5).

Для оценки членов в (17.2), содержащих $\hat{u}_i^{(j)}$, потребуется совершить преобразование Фурье по некоторому направлению b . Это придется делать из-за наличия каустик. Пусть $V \subset \mathbb{R}^2$ и $W \subset E \times E$ — произвольные подмножества. Обозначим $B(V, W)$ подмножество Σ , состоящее из всех точек z , таких, что 1) $z \in \Gamma_{\eta_1} \cup \Gamma_{\eta_2}$ для некоторой пары $(\eta_1, \eta_2) \in W$, 2) $H(x, z) = 0$ для некоторого $x \in V$.

Лемма 17.3. Для любого $x^* \in \bar{\Omega}$ и любой пары $(\eta_1^*, \eta_2^*) \in E \times E$ существуют окрестность V точки x в \mathbb{R}^2 , окрестность W точки (η_1^*, η_2^*) в $E \times E$ и вектор b единичной длины, такие, что

$$e(z) \neq b \text{ и } e(z) \neq -b$$

для всех $z \in B(V, W)$. Если $x^* \in \partial\Omega$, то в качестве вектора b можно взять единичный вектор, касательный к $\partial\Omega$ в точке x^* .

Доказательство. Пусть $\tilde{A} = \hat{\sigma} T A$ для любого $A \subset \Sigma$, где $\hat{\sigma}$ — инволюция, определенная в конце § 1. В силу непрерывной зависимости всех рассматриваемых функций от x и η достаточно доказать существование единичного вектора b , такого, что $e(z) \neq b$ для всех $z \in B = B(\{x^*\}, \{(\eta_1^*, \eta_2^*)\}) \cup \tilde{B}(\{x^*\}, \{(\eta_1^*, \eta_2^*)\})$. Если $x^* \in \partial\Omega$, то это свойство нужно проверить для $b \in \tau(x^*)$. Последнее выполняется, так как оно означает, что лучи $\text{line}(z)$, где $z \in \Gamma_{\eta_1^*} \cup \Gamma_{\eta_2^*}$, не касаются $\partial\Omega$.

Пусть теперь x^* лежит внутри Ω . Рассмотрим множество $B_0 \supset B$, состоящее из всех точек z , для которых $H(x^*, z) = 0$. Отображение, сопоставляющее каждому $z \in B_0$ единичный вектор $e(z)$, есть гомеоморфизм множества $B_0 \subset \Sigma$ на единичную окружность $|e| = 1$. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что $B \neq B_0$. Предположим, что $B = B_0$. Представим множество B_0 в виде $B_0 = \bigcup_{1 \leq \alpha \leq N} (\Gamma_\alpha \cap B_0)$, где $\Gamma_\alpha = \Gamma_{\eta_i^*}^{(j)}$ или $\Gamma_\alpha = \tilde{\Gamma}_{\eta_i^*}^{(j)}$, $i = 1, 2$.

Указанное представление есть разбиение множества B_0 на

непересекающиеся замкнутые множества, так как Γ_α при разных α либо совпадают, либо не пересекаются. Последнее следует из того, что $\tilde{\Gamma}_{\eta^*}^{(j)}$ — также компонента инвариантной кривой с иррациональным числом вращения. Из связности B_0 следует, что $B_0 = \Gamma_\alpha \cap B_0$ для некоторого α . На самом деле $B_0 = \Gamma_\alpha$, так как оба эти множества являются топологическими окружностями. Итак, $B_0 = B = \Gamma_\alpha$. Поскольку $\{line(z)\}_{z \in B_0}$ — множество всех лучей, проходящих через точку z^* , то найдется точка $z_0 \in \Gamma_\alpha$, для которой вектор $e(z_0)$ ортогонален к $\partial\Omega$ в одной из двух точек пересечения $line(z)$ с $\partial\Omega$. Тогда либо $Tz_0 \in \Gamma_\alpha$, либо $T^{-1}(z_0) \in \Gamma_\alpha$, так как отраженный в этой точке луч также проходит через точку z^* . Отсюда следует, что число компонент у инвариантных кривых равно единице. Но тогда любой луч, проходящий через z^* , после отражения от $\partial\Omega$ также проходит через z^* в силу того, что $TB_0 = B_0$. Получаем, что любой луч из семейства $line(B_0)$ ортогонален $\partial\Omega$. Это может быть только в том случае, если Ω — круг и z^* — его центр. Но в этом исключительном случае число вращения $T|_{\Gamma_\alpha}$ равно $1/2$, что противоречит нашим предположениям о семействе инвариантных кривых. ■

Введем в окрестности z^* декартову координатную систему (x_1, x_2) , положив $z = z^* + x_1 b^1 + x_2 b$, где b^1 — единичный вектор, ортогональный к b . Формулы (12.4) задают $u_{pq}^{(j)}(z)$ при всех $z \in \mathbb{R}^2$, а не только при $z \in \Omega$. В следующей ниже формуле подразумевается именно это продолжение. Рассмотрим преобразование Фурье функций $\hat{u}_\alpha^{(j)}(z) \psi(z)$, $\alpha = 1, 2$:

$$v_\alpha^{(j)}(x_1, \theta) = \sqrt{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sqrt{\lambda} x_2 \theta} \hat{u}_\alpha^{(j)}(x_1, x_2) \psi(x_1, x_2) dx_2. \quad (17.7)$$

Лемма 17.4. а) При $|\theta| \geq 1$

$$v_\alpha^{(j)}(x_1, \theta) = O(p^{-2} |\theta|^{-2}).$$

б) Существуют окрестности $V \ni z^*$, и $W \ni (\eta_1^*, \eta_2^*)$, такие, что следующая оценка выполняется, если $\text{supp } \psi \subset V$, равномерно по $(p_1, q_1, p_2, q_2) \in \mathcal{Q}_2^W$ и $|\theta| < 1$:

$$v_\alpha^{(j)}(x_1, \theta) = \sum_{\beta=1}^2 A_{\alpha, \beta}^{(j)}(x_1, \theta) e^{i\sqrt{\lambda} h_{\alpha, \beta}^{(j)}} + O(p^{-2}). \quad (17.8)$$

Производные функций $A_{\alpha, \beta}^{(j)}$ и $h_{\alpha, \beta}^{(j)}$ до четвертого порядка включительно оцениваются постоянными, не зависящими от (p_1, q_1, p_2, q_2) . Функции $A_{\alpha, \beta}^{(j)}(x_1, \theta) = 0$ при $|x_1| > \text{diam supp } \psi$. Суммирование в (17.8) ведется по стационарным точкам интеграла (17.7), число которых, лежащих в носителе ψ , не превосходит двух. Функции $h_{\alpha, \beta}^{(j)}(x_1, \theta)$ — значения функции (17.10) в этих стационарных точках.

Доказательство. Используя формулу (13.3), запишем $v_{\alpha}^{(j)}$ в виде

$$v_{\alpha}^{(j)}(x_1, \theta) = \sqrt[4]{\lambda} \iint e^{i\sqrt{\lambda} \tilde{h}_{\alpha}^{(j)}(x, \theta, \xi)} \tilde{A}_{\alpha}^{(j)}(x, \theta, \xi) \times \\ \times \psi(x_1, x_2) dx_2 d\xi + O(p^{-2}), \quad (17.9)$$

$$\text{где } \tilde{h}_{\alpha}^{(j)} = \theta x_2 + S_j(x, x_0, \xi_0, \xi, \eta_{\alpha}), \quad (17.10)$$

Уравнения для стационарных точек интеграла (17.9) имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \tilde{h}_{\alpha}^{(j)}}{\partial x_2} = \theta + (b, e_i(\xi, \eta_{\alpha})) = 0, \\ \frac{\partial \tilde{h}_{\alpha}^{(j)}}{\partial \xi} = H_j(x, \xi, \eta_{\alpha}) \frac{d}{d\xi} \varphi_j(\xi, \eta_{\alpha}) = 0. \quad (17.11)$$

На носителе подынтегральной функции $d\varphi_j/d\xi \neq 0$. Видно, что при $|\theta| > 1$ стационарных точек нет, откуда следует утверждение а). Уравнения (17.11) показывают, что стационарная точка $(x_2^{(\beta)}, \xi_i^{(\beta)})$ находится следующим образом: из семейства лучей $\text{line}(z_j(\xi, \eta_{\alpha}))$ выбирается луч, у которого косинус угла, образованного с направлением b , равен $-\theta$. Значение $x_2^{(\beta)}$ равно проекции на ось x_2 точки пересечения прямой $x_1 = \text{const}$ с выбранным лучом. Так как $d\varphi_j/d\xi \neq 0$, то в малой окрестности x^* таких стационарных точек может быть не более двух. Стационарные точки будут невырожденными:

$$\text{hess } \tilde{h}_{\alpha}^{(j)} = - (b, n_j(\xi, \eta_{\alpha}))^2 \left(\frac{d\varphi_j}{d\xi} \right)^2 \neq 0, \quad (17.12)$$

если $(\eta_1, \eta_2) \in W$, где W — достаточно малая окрестность (η_1^*, η_2^*) . Это верно в силу выбора вектора b . Применяя лемму 13.1 к (17.9), получаем формулу (17.8). ■

Оценка $(\hat{u}_1^{(j)}\psi, \hat{u}_2^{(j')}\psi)$. Запишем это скалярное произведение в виде

$$(\hat{u}_1^{(j)}\psi, \hat{u}_2^{(j')}\psi) = \frac{1}{2\pi} \sqrt[4]{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta \iint_{\Omega} e^{-i\sqrt{\lambda}x_2\theta} \times \\ \times u_1^{(j)}(x_1, \theta) \hat{u}_2^{(j')}(x_1, x_2) \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (17.13)$$

Окрестности V и W выберем такими, чтобы в них выполнялась оценка (17.8). Подставим в (17.13) выражения (17.8) для $u_1^{(j)}$ и (13.15) для \hat{u}_2 . Получим конечную сумму интегралов вида

$$\sqrt[4]{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta \iint_{\Omega} e^{i\sqrt{\lambda}h(x_1, x_2, \theta)} A(x_1, x_2, \theta) \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (17.14)$$

где $h(x_1, x_2, \theta) = -x_2\theta + x_2^{(\beta)}\theta +$

$$+ S_j(x^{(\beta)}, x_0, \xi_0, \xi^{(\beta)}, \eta_1) - S_{j'}(x, x_0, \xi_0, \xi_{j'\rho}, \eta_2). \quad (17.15)$$

Здесь $x^{(\beta)} = (x_1, x_2^{(\beta)})$, $(x_2^{(\beta)}, \xi^{(\beta)})$ — стационарные точки функции (17.10). Вычислим $\text{grad } h$:

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = -x_2 + x_2^{(\beta)}, \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} = (b^\perp, e_j(\xi^{(\beta)}, \eta_1) - e_{j'}(\xi_{j'\rho}, \eta_2)), \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} = -\theta - (b, e_{j'}(\xi_{j'\rho}, \eta_2)). \quad (17.16)$$

Используя оценку а) леммы 17.4 и вводя дополнительные срезающие функции, можно свести оценку интеграла к случаю, когда носитель подынтегральной функции содержится в $V \times]-1, 1[$. Пусть $\epsilon > 0$ и $\mathcal{U}_\epsilon = \{(x_1, x_2, \theta) \in V \times]-1, 1[: |\partial h / \partial \theta| < \epsilon p^{-1/2}\}$. Выполнение условия 3) леммы 17.2 будет доказано, если покажем, что при некотором $\epsilon > 0$ справедливы неравенства $|\text{grad}_{x_1 x_2} h| \geq \text{const} \cdot p^{-1/2}$ при всех $(x_1, x_2, \theta) \in \mathcal{U}_\epsilon$ и $|(\text{grad}_{x_1 x_2} h, \tau(x_1, x_2))| \geq \text{const} \cdot p^{-1/2}$ при $(x_1, x_2, \theta) \in \mathcal{U}_\epsilon$ и $(x_1, x_2) \in \partial\Omega$.

Так как $-\theta = (b, e_j(\xi^{(\beta)}, \eta_1))$ (см. уравнения (17.11)), то $\text{grad}_{x_1 x_2} h = e_j(\xi^{(\beta)}, \eta_1) - e_{j'}(\xi_{j'\rho}, \eta_2)$. При $(x_1, x_2, \theta) \in \mathcal{U}_\epsilon$ в силу (17.11) и того, что $|x_2 - x_2^{(\beta)}| < \epsilon p^{-1/2}$, верна оценка $|N_j(x, \xi^{(\beta)}, \eta_1)| \leq \text{const} \cdot \epsilon p^{-1/2}$. Кроме того, $N_{j'}(x, \xi_{j'\rho}, \eta_2) = 0$ по определению $\xi_{j'\rho}$. Так как расстояние между Γ_{η_1} и Γ_{η_2} не меньше $\text{const} \cdot p^{-1/2}$, то $\text{dist}(z_j(\xi^{(\beta)}, \eta_1), z_{j'}(\xi_{j'\rho}, \eta_2)) \geq \text{const} \cdot p^{-1/2}$. Введем в окрестности этих точек координатную систему $(H(x), \varphi)$.

Если ω меняется в $\bar{\Omega}$, то все евклидовы метрики, соответствующие этим координатным системам, равномерно эквивалентны. Координаты $H(\omega)$ этих точек, как было показано, различаются на величину, не превышающую $\text{const} \cdot \varepsilon p^{-1/2}$. Поэтому при достаточно малых ε координаты φ этих точек должны различаться на величину, не меньшую $\text{const} \cdot p^{-1/2}$. Отсюда следует нужная оценка для $\text{grad}_{x_1, x_2} h = e(z_j(\xi_j^{(\rho)}, \eta_1)) - e(z_{j'}(\xi_{j'}^{(\rho)}, \eta_2))$. При $(x_1, x_2) \in \partial\Omega$ аналогичные рассуждения в координатной системе (s, ϑ) дают нужную оценку для $(\text{grad}_{x_1, x_2} h, \tau(x_1, x_2))$.

Оценка $(\hat{u}_1^{(j)} \psi, \hat{u}_2^{(j')} \psi)$. Действуя так же, как и в предыдущем случае, здесь мы должны оценивать четырехкратные интегралы вида

$$\sqrt{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta_2 \iint_{\Omega} e^{i\sqrt{\lambda} h(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2)} A(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2) dx_1 dx_2.$$

Не будем приводить явное выражение для $h(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2)$. Выпишем лишь выражение для градиента этой функции:

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = (b^1, e_j(\xi_j^{(\rho)}, \eta_1) - e_{j'}(\xi_{j'}^{(\rho)}, \eta_2)),$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} = -\theta_1 + \theta_2,$$

(17.17)

$$\frac{\partial h}{\partial \theta_1} = -x_2 + x_{2,j}^{(\rho)},$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta_2} = x_2 - x_{2,j'}^{(\rho)}.$$

Мы видим, что почти без всяких изменений проходят те же рассуждения, что и при оценке $(\hat{u}_1^{(j)} \psi, \hat{u}_2^{(j')} \psi)$.

Технику этого параграфа можно применять и для оценки нормы u_{pq} сверху. Лемма 13.2 показывает, что $\hat{u}_{pq}^{(j)}(\omega) = O(1)$ равномерно по $x \in \bar{\Omega}$. Вне каустики $\hat{u}_{pq}^{(j)}(\omega)$ также будут иметь порядок $O(1)$. В окрестности каустики они имеют порядок $O(p^{1/2})$. Однако, совершая преобразование Фурье в направлении \mathbf{b} , можно показать, что $\|\hat{u}^{(j)} \psi\|_{L_2(\Omega)} = O(1)$. Сформулируем более общий результат, который понадобится в следующем параграфе. Пусть $[u_{pq}]_0 = u_{pq}$, $[u_{pq}]_k$ при $k \geq 1$ — функция, которая получается, если в (12.4) отбросить в фигурных скобках первые k членов и полученные выражения подставить в (12.3) вместо $u_{pq}^{(j)}$.

Лемма 17.5. Равномерно по $(p, q) \in \Lambda$

$$\| [u_{pq}]_k \|_{L_2(\Omega)} = O(p^{-k}).$$

§ 18. Оценки в области \mathcal{D}_3

Лемма 18.1. Каждое $\eta^* \in E$ обладает окрестностью W в E , такой, что оценка (12.12) выполняется равномерно по $(p_1, q_1, p_2, q_2) \in \mathcal{D}_3^{W \times W}$. Здесь $\mathcal{D}_3^{W \times W}$ состоит из всех $(p_1, q_1, p_2, q_2) \in \mathcal{D}_3$, для которых $\eta_{p_i, q_i} \in W, i=1, 2$.

Из этой леммы следует нужная оценка в области \mathcal{D}_3 , так как \mathcal{D}_3 с точностью до конечной части покрывается областями $\mathcal{D}_3^{W_\alpha \times W_\alpha}$, если области W_α покрывают E . Дальнейшее содержание параграфа посвящено доказательству леммы 18.1.

Пару $(\alpha, \eta) \in \mathbb{R}^2 \times E$ будем называть регулярной, если а) $\alpha \notin L_\eta$, б) существует по крайней мере одна точка пересечения кривой $B(\alpha) = \{z \in \Sigma : H(\alpha, z) = 0\}$ с кривой Γ_η , которая не лежит в $\bigcup_{0 \leq j \leq n-1} \Gamma_j^{(\varphi)}$ (т.е. в этой точке $d\varphi_j(\xi, \eta)/d\xi \neq 0$).

Лемма 18.2. Существует окрестность W точки η^* в E и непустое открытое множество $V \subset \Omega$, такие, что $V \times W$ целиком состоит из регулярных точек.

Доказательство. Так как множество регулярных точек открыто, то достаточно найти точку $\alpha^* \in \partial\Omega$, такую, что пара (α^*, η^*) регулярна. Выберем на кривой Γ_{η^*} точку $z = z_j(\xi, \eta^*)$, не лежащую на $\bigcup_{0 \leq j \leq n-1} \Gamma_j^{(\varphi)}$ (равенство $\Gamma_{\eta^*} = \bigcup_{0 \leq j \leq n-1} \Gamma_j^{(\varphi)}$ невозможно). В качестве α^* возьмем точку $\alpha(z_j(\xi, \eta^*)) \in \partial\Omega$, если она не лежит на каустике L_{η^*} , или достаточно близко к ней точке на $\partial\Omega$, не лежащую на каустике, в противном случае. ■

Далее, фиксируем множество V , удовлетворяющее вместе с некоторой окрестностью $W \ni \eta^*$ условиям леммы 18.2. Напомним, что из условия $\alpha \notin L_\eta$ следует, что все пересечения $B(\alpha)$ с Γ_η трансверсальны. Выберем множества V и W настолько малыми, чтобы 1) число точек пересечения $B(\alpha)$ с Γ_η не зависело от (α, η) ; 2) эти точки $\{z_\rho(\alpha, \eta), 1 \leq \rho \leq N\}$ были гладкими функциями

заданными на $V \times W$; 3) множества $\varphi(z_\rho(V \times W))$, $1 \leq \rho \leq M_1$, попарно не пересекались. Первым двум условиям можно удовлетворить, пользуясь теоремой о неявной функции, третьему — за счет малости $V \times W$, так как $z_\rho(x^*, \eta^*)$ при разных ρ не совпадают. Пусть для определенности $\xi_1(x, \eta)$ является (при всех $(x, \eta) \in V \times W$) точкой, в которой $d\varphi/d\xi \neq 0$. Возьмем тригонометрический полином $P(\varphi)$, гладкую функцию $q(x)$, такую, что $\text{supp } q \subset V$, и вещественное число N . Их фиксируем позже. Представим $P(\varphi)$ в виде $P(\varphi) = \sum_{l=0}^M P_l(\cos \varphi, \sin \varphi)$, где $P_l(x, y)$ — однородные полиномы степени l . Пусть \mathcal{L}_l — дифференциальный оператор с главной частью $Nq(x) = P_l\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y}\right)$. Подберем младшие члены в \mathcal{L}_l из условия формальной самосопряженности. Вместо задачи $-\Delta u = \lambda u$ рассмотрим возмущенную задачу

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sum_{l=0}^M (\sqrt{\lambda})^{-l-\nu+3} \mathcal{L}_l\right) \tilde{u} = \tilde{\lambda} \tilde{u}, \quad (18.1)$$

$$\tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Будем рассматривать эту задачу, считая, что спектральный параметр $\tilde{\lambda}$ меняется в окрестности $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_{p_1 q_1} + \lambda_{p_2 q_2})$. Построим приближенные решения (18.1), пользуясь формулами (12.3)–(12.9), и обозначим их \tilde{u}_{pq} , $\tilde{\lambda}_{pq}$. Коэффициенты $v_s^{(j)}$ и α_s при $s < \nu - 2$ оставим теми же, что и в u_{pq} , λ_{pq} , а дальнейшие коэффициенты определим из требования, чтобы уравнение (18.1) удовлетворялось с точностью до величины порядка $p^{-\nu}$ в $L_2(\Omega)$ (краевое условие (18.1) по-прежнему должно выполняться с точностью до $O(p^{-\nu-2})$ в $L_2(\partial\Omega)$). При этом придется считать, что $v_s^{(j)}$ при $s \geq \nu - 2$ зависят также и от x .

При подстановке выражений (12.3)–(12.9) в уравнение (18.1) для определения функций $v_s^{(j)}(x, \xi, \eta, \delta)$ при $s \geq \nu - 2$ получится система рекуррентных дифференциальных уравнений первого порядка, которая легко решается, а начальные данные определяются из краевых условий. Для этих начальных данных $\tilde{v}_s^{(j)}(\xi, \eta, \delta) = v_s^{(j)}(x_j(\xi, \eta), \xi, \eta, \delta)$ получается система уравнений вида (15.6), из условия разрешимости которой находятся коэффициенты α_s . Выпишем здесь только уравнение для $v_{\nu-2}^{(j)}$:

$$2i(e_j(\xi, \eta), \text{grad } v_{\nu-2}^{(j)}) + Nq(x) \sum_{l=0}^M \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^{l-1} \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^{\nu-2} P_l(e_j(\xi, \eta)) = 0. \quad (18.2)$$

Уравнение для определения $\tilde{v}_{\nu-2}^{(j)}(\xi, \eta, \delta)$ отличается от уравнения (15.6) для $v_{\nu-2}^{(j)}(\xi, \eta, \delta)$ наличием в левой части членов, имеющих вид интеграла от второго слагаемого в (18.2), взятого по отрезку $l_j(\xi, \eta)$ и умноженного на $(2i)^{-1}$. Символом $l_j(\xi, \eta)$ обозначен отрезок луча $\text{line}(z_j(\xi, \eta))$, заключенный между точками пересечения с $\partial\Omega$. В результате такого изменения постоянная $\alpha_{\nu-2}$ примет другое значение. Она будет отличаться от прежней постоянной на величину

$$N \frac{\rho(\eta)}{2\pi} \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\nu-2} \gamma(\eta) = -\frac{N}{2(Q(\eta)/\rho(\eta) + \eta)} \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\nu-2} \times \\ \times \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 P(\varphi_j(\xi, \eta)) \left(\int_{l_j(\xi, \eta)} q(z) dl \right) d\xi + O(\rho^{-2}) \right\}. \quad (18.3)$$

Член $O(\rho^{-2})$ произошел из множителя $(\sqrt{\lambda}/\sqrt{\lambda})^{\nu-1}$ в (18.2). Аналогичные изменения произойдут и в последующих членах разложения (12.8). Используя близость невозмущенных собственных чисел (см. определение множества \mathcal{D}_3), получаем неравенства

$$\left| \sqrt{\tilde{\lambda}_{p_1 q_1}} - \sqrt{\tilde{\lambda}_{p_2 q_2}} \right| \geq \left| \left(\sqrt{\tilde{\lambda}_{p_1 q_1}} - \sqrt{\lambda_{p_1 q_1}} \right) - \left(\sqrt{\tilde{\lambda}_{p_2 q_2}} - \sqrt{\lambda_{p_2 q_2}} \right) \right| - \\ - \text{const} \cdot \rho^{-\nu+1} \geq N(\sqrt{\lambda})^{-\nu+2} |\gamma(\eta_1) - \gamma(\eta_2)| - \text{const} \cdot \rho^{-\nu+1}. \quad (18.4)$$

Лемма 18.3. Существуют функция q с носителем в множестве V и полином P , такие, что $\gamma(\eta) \neq 0$ при $\eta = \eta^*$.

Доказательство. Вычислим производную

$$\frac{d\gamma}{d\eta} = -\pi \sum_{\rho} \iint \left\{ (Q(\eta) + \eta^{\rho}(\eta))^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} q P'_{\varphi} + \right. \\ \left. + \left[q \frac{d}{d\eta} (Q(\eta) + \eta^{\rho}(\eta))^{-1} - (Q(\eta) + \eta^{\rho}(\eta))^{-1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial}{\partial \eta} H(\text{grad } q, n) \right] P \right\} dl d\xi + O(\rho^{-2}). \quad (18.5)$$

Суммирование здесь ведется по всем точкам пересечения $z_{\rho}(z, \eta)$ кривой $B(z)$ с Γ_{η} ; интегрирование происходит сначала по z вдоль $\text{line}(z_{\rho}(z, \eta))$, затем по Γ_{η} ; $H = H_{j\rho}(z, \xi, \eta)$; $\varphi = \varphi_{j\rho}(\xi, \eta)$; $z_{\rho}(z, \eta) \in \Gamma_{\eta}^{(j\rho)}$; дифференцирование по η происходит при фиксированном ξ . Если в (18.5) вместо полинома $P(\varphi)$ подставить гладкую функцию $P_1(\varphi)$, равную нулю на множествах $\varphi(z_{\rho}(V, W))$ при $\rho \neq 1$, то оставшийся первый член в сумме по ρ можно переписать, интегрируя по частям, в виде

$$-\pi \int \left\{ \int \left[\frac{d}{d\eta} (Q(\eta) + \eta^{\mathcal{P}(\eta)})^{-1} + (Q(\eta) + \eta^{\mathcal{P}(\eta)})^{-1} \left(\frac{\varphi'_{\xi}}{\varphi'_{\xi}} \right)'_{\xi} \right] q(x) dl - \frac{\mathcal{D}(\eta)}{Q(\eta) + \eta^{\mathcal{P}(\eta)}} \int \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^{-1} (\text{grad } q, n) dl \right\} P_1(\varphi) d\xi. \quad (18.6)$$

Выберем теперь q таким, чтобы выражение в фигурных скобках было отлично от тождественного нуля. Это возможно, так как коэффициент при $(\text{grad } q, n)$ отличен от нуля (здесь n — нормаль к $\text{line}(z_1(x, \eta))$). Затем выберем функцию $P_1(\varphi)$, такой, чтобы выражение (18.6) (при $\eta = \eta^*$) было отлично от нуля. Наконец выберем в качестве $P(\varphi)$ полином, достаточно хорошо приближающий $P_1(\varphi)$ вместе с первой производной, чтобы было выполнено неравенство $d\gamma/d\eta \neq 0$. ■

Лемма 18.4. Если $(p_1, q_1, p_2, q_2) \in \mathcal{D}_3$, то при достаточно больших $p = \min\{p_1, p_2\}$

$$1) \Delta p = p_1 - p_2 \neq 0,$$

$$2) |\eta_{p_1 q_1} - \eta_{p_2 q_2}| \geq c |\Delta p| p^{-1},$$

где c — положительная постоянная.

Доказательство. Из формулы (12.8) и определения множества Λ следует, что

$$\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} = \frac{2\pi}{\mathcal{F}(\eta_1)} p_1 - \frac{2\pi}{\mathcal{F}(\eta_2)} p_2 + f(\eta_1) - f(\eta_2) + O(p^{-\alpha_1}), \quad (18.7)$$

где $f(\eta)$ — гладкая функция, $\alpha_1 = \min\{1, \alpha\}$, $\lambda_i = \lambda_{p_i q_i}$, $\eta_i = \eta_{p_i q_i}$, $i = 1, 2$. Предположим, что $\Delta p = 0$. Тогда из (18.7) следует, что $\Delta \eta = \eta_1 - \eta_2 = O(p^{-1-\alpha_1})$. Так как в силу (9.8)

$$\left| p \left(\frac{Q(\eta_1)}{\mathcal{F}(\eta_1)} - \frac{Q(\eta_2)}{\mathcal{F}(\eta_2)} \right) + \Delta q \right| = O(p^{-\alpha}),$$

то $\Delta q = O(p^{-\alpha})$, т.е. $\Delta q = q_2 - q_1 = 0$ при достаточно больших p , что противоречит неравенству $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$. Итак, $\Delta p \neq 0$. Из формулы (18.7) и близости λ_1 к λ_2 теперь следует, что

$$\left(\mathcal{F}'(\eta) + O\left(\frac{1}{p}\right) \right) \Delta \eta = \mathcal{F}(\eta_1) \frac{\Delta p}{p_1} + O(p^{-1-\alpha_1}). \quad \blacksquare$$

Из неравенств (18.4), лемм 18.3 и 18.4 следует, что при достаточно больших N справедливо неравенство (16.3), и к фун-

кциям $\tilde{u}_{p_i q_i}$ можно применить рассуждения § 16 для близких собственных чисел. Получается оценка

$$(\tilde{u}_{p_1 q_1}, \tilde{u}_{p_2 q_2}) = O(p^{-2}). \quad (18.8)$$

Так как в выражениях для $\tilde{u}_{p_i q_i}$ и $u_{p_i q_i}$ совпадают коэффициенты ν_s, α_s с $s < \nu - 2$, лемма 17.4 дает оценку

$$\|u_{p_i q_i} - \tilde{u}_{p_i q_i}\|_{L_2(\Omega)} = O(p^{-\nu+2}), \quad i = 1, 2. \quad (18.9)$$

По предположению $\nu \geq 4$. Поэтому из выражений (18.8) и (18.9) следует нужная оценка для скалярного произведения функций $u_{p_i q_i}$.

Глава 4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О СЕМЕЙСТВЕ ИНВАРИАНТНЫХ КРИВЫХ

В этой главе будет изложено доказательство теоремы 5, сформулированной в § 5. Основные результаты предыдущих глав в своих формулировках и доказательствах существенно опираются на эту теорему. В 1962 г. появилась работа Мозера [44], в которой доказывалось существование одной инвариантной кривой конечного класса гладкости у преобразования T , близкого к T_0 . Мозер применил для доказательства модифицированный метод Ньютона, предложенный для подобного типа задач А.Н.Васильевым [11]. Изложенное ниже доказательство основано на работе Мозера и во многом следует его технике. Руководящей идеей было распространять доказательство Мозера на случай семейства инвариантных кривых положительной меры и сделать по возможности все гладким. Отметим, что в данной ситуации мы не можем непосредственно применить абстрактную теорему о неявной функции Цендера [49 - 51], так как приближенный обратный к оператору, входящему в линеаризованное уравнение, в нашем случае будет иметь бесконечную потерю гладкости из-за дифференцирования по поперечной переменной y .

Не будем здесь повторять формулировку доказанной теоремы, отсылая читателя к § 5. Первые три параграфа настоящей главы посвящены некоторым техническим приготовлениям. В § 22 изложен план доказательства, в дальнейших параграфах этот план реализуется.

Для краткости буквой E будем обозначать множество $E_{\sigma, \tau} \cap \Pi[a, b]$. Постоянные, обозначаемые символами $c_i, 1 \leq i \leq 4$, и $c_i^{(r)}, 1 \leq i \leq 18, r=0, 1, 2, \dots$, зависят только от σ . Постоянные в оценках, содержащих символы σ и O , зависят только от σ и r , где r - вспомогательный целочисленный параметр, указанный

вающий число вовлекаемых в рассмотрение производных на каждом шаге итерационного процесса.

Символы $D_x, D_y, D_\varepsilon, D_\eta$ и т.п. обозначают операторы частного дифференцирования по соответствующим переменным.

§ 19. Срезающий множитель

Пусть N — положительное число. Определим множество E_N следующим образом: E_N состоит из всех чисел $y \in [\alpha, b]$, таких, что для любых целых m и n , $0 < n \leq N$, выполняется неравенство

$$|ny - m| \geq \sqrt{\varepsilon} n^{-\sigma}. \quad (19.1)$$

Введем также множества E'_N и E''_N , которые определяются таким же образом, как и E_N , с тем лишь изменением, что в неравенстве (19.1) число $\sqrt{\varepsilon}$ заменено соответственно на $\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$ и $\frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon}$. Ясно, что

$$E''_N \supset E'_N \supset E_N \supset E. \quad (19.2)$$

В этом параграфе построим гладкую функцию $\theta_{NM}(y)$, равную 1 при $y \in E_N$ и равную 0 при $y \notin E'_N$, которую будем называть срезающим множителем.

Фиксируем гладкую функцию $\pi(t)$, заданную на вещественной оси и удовлетворяющую условиям: 1) $0 \leq \pi(t) \leq 1$; 2) $\pi(t) = 0$ при $t > -1/4$; 3) $\pi(t) = 1$ при $t < -1$. Срезающий множитель $\theta_{NM}(y)$, где $M > 0$, определяется формулой

$$\theta_{NM}(y) = 1 - \sum_k \pi(M(\alpha_k - y))\pi(M(y - \beta_k)). \quad (19.3)$$

Суммирование в (19.3) распространяется на все интервалы $\Delta_k =]\alpha_k, \beta_k[$, составляющие множество $] \alpha, b [\setminus E_N$. В следующей лемме приведены нужные нам свойства функции $\theta_{NM}(y)$.

Лемма 19.1. 1) $\theta_{NM} \in C^\infty$, $0 \leq \theta_{NM}(y) \leq 1$;

2) $|D_y^\rho \theta_{NM}| \leq c_1^{(\rho)} M^\rho$, $0 \leq \rho \leq r$;

3) $\theta_{NM}(y) = 1$, $y \in E_N$;

4) если

$$M > 2(\sqrt{\varepsilon})^{-1} N^{\sigma+1}, \quad (19.4)$$

то $\theta_{NM}(y) = 0$ при $y \notin E'_N$;

5) если $M_+ \geq 8M$, $N_+ \geq N$, $|\Delta| < M_+^{-1}$, где Δ — вещественное число, и выполняется неравенство (19.4), то при $y \in \text{supp } \theta_{N_+M_+}$

$$1 - \theta_{NM}(y + \Delta) = 0. \quad (19.5)$$

Доказательство. Первые два свойства следуют из того факта, что интервалы Δ_k попарно не пересекаются. Из определения функции $\pi(t)$ следует, что $\pi(M(\alpha_k - y))\pi(M(y - \beta_k)) = 0$ вне интервала Δ_k . Отсюда следует свойство 3). Докажем свойство 4). Множество E'_N получается удалением из $[a, b]$ интервалов вида $\left] \frac{m}{n} - \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon} n^{-\sigma-1}, \frac{m}{n} + \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon} n^{-\sigma-1} \right[$, $0 < n \leq N$.

Точки этих интервалов находятся на расстоянии, не меньшем $\frac{1}{2} \sqrt{\epsilon} N^{-\sigma-1}$, от множества E_N . Поэтому для $y \in \Delta_k \cap (R \setminus E'_N)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \alpha_k - y &< -\frac{1}{2} \sqrt{\epsilon} N^{-\sigma-1} < -M^{-1}, \\ y - \beta_k &< -\frac{1}{2} \sqrt{\epsilon} N^{-\sigma-1} < -M^{-1}. \end{aligned} \quad (19.6)$$

Если $y \notin E'_N$, то в силу (19.2) точка y обязательно содержится в одном из интервалов Δ_k . Неравенства (19.6) показывают, что для $y \notin E'_N$ верно следующее:

$$\pi(M(\alpha_k - y))\pi(M(y - \beta_k)) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin \Delta_k, \\ 1, & \text{если } y \in \Delta_k, \end{cases} \quad (19.7)$$

т.е. во всей сумме (19.3) один член равен единице, а все остальные нулю.

Приступим к доказательству свойства 5). $E_{N_+} \subset E_N$, так как $N_+ > N$. Поэтому интервалы смежности к E_{N_+} (обозначим их Δ_k^+) содержат в себе интервалы Δ_k . Величина $1 - \theta_{NM}(y + \Delta)$ отлична от нуля лишь тогда, когда число $y + \Delta$ принадлежит какому-нибудь интервалу из системы $\{\Delta_k\}$. Рассмотрим один такой интервал Δ_{k_0} . Он содержится в некотором интервале из системы $\{\Delta_k^+\}$. Пусть $\Delta_{k_1}^+ \supset \Delta_{k_0}$. Введем обозначения: $\Delta_{k_0} =]\alpha, \beta[$, $\Delta_{k_1}^+ =]\alpha^+, \beta^+[$. Функция $\theta_{N_+M_+}(y)$ равна нулю на интервале $[\alpha^+ + M_+^{-1}, \beta^+ - M_+^{-1}]$ в силу определения (19.3), поэтому доста-

точно оценить левую часть (19.5) на интервалах $[\alpha - \Delta, \alpha^+ + M_+^{-1}]$ и $[\beta^+ - M_+^{-1}, \beta - \Delta]$, разумеется, если они не пусты. Оценим ее на первом интервале. (Оценка на втором интервале проводится аналогично.) На этом интервале

$$1 - \theta_{NM}(y + \Delta) = \pi(M(\alpha - \Delta - y))\pi(M(y + \Delta - \beta)). \quad (19.8)$$

Второй сомножитель $\pi(M(y + \Delta - \beta))$ равен единице, так как

$$M(y - \beta - \Delta) \leq M(\alpha - \beta + 2M_+^{-1}) < 2MM_+^{-1} - M\sqrt{\epsilon}N^{-\sigma-1} < -1.$$

Для аргумента первого сомножителя в правой части (19.8) имеем оценку

$$0 > M(\alpha - \Delta - y) > M(\alpha - \Delta - \alpha^+ - M_+^{-1}) > -2MM_+^{-1} \geq -\frac{1}{4}. \quad (19.9)$$

Оценка (19.5) получается из (19.8), (19.9) и свойства 2) в определении функции $\pi(t)$. ■

§ 20. Сглаживающий оператор

Сглаживающий оператор $T_{NM}^{(r)}$, который будет построен в этом параграфе, переводит непрерывные функции, заданные на $\Pi_{\tilde{a}, \tilde{b}}$, где $a \leq \tilde{a} < \tilde{b} \leq b$, в C^∞ -функции, заданные на $\Pi_{\tilde{a}+M^{-1}, \tilde{b}-M^{-1}}$. Будем считать, что $\tilde{b} - \tilde{a} > 2M^{-1}$. Оператор действует на функцию $h(x, y)$ по формуле

$$(T_{NM}^{(r)} h)(x, y) = \iint_{\Pi_{\tilde{a}, \tilde{b}}} X_{N,r}(x - \xi) Y_{M,r}(y - \eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (20.1)$$

Здесь $X_{N,r}(x)$ — гладкая функция, периодическая с периодом 1, $Y_{M,r}(y)$ — гладкая функция, равная нулю при $|y| \geq M^{-1}$.

Построение $Y_{M,r}(y)$. Это построение ничем не отличается от соответствующего построения в статье Мозера [44]. Положим

$$Y_{M,r}(y) = M\varphi_r(My), \quad (20.2)$$

где $\varphi_r(t)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условиям:

$$а) \varphi_r(t) = 0 \quad \text{при} \quad |t| \geq 1,$$

$$б) \int_{-1}^1 \varphi_r(t) t^k dt = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 0, & 1 \leq k \leq r-1. \end{cases}$$

Для полноты изложения приведем доказательство существования такой функции $\varphi_r(t)$, содержащееся в [44]. Фиксируем гладкую функцию $\psi(t)$, удовлетворяющую условиям:

$$а') \psi(t) = 0 \text{ при } |t| \geq 1/2,$$

$$б') \psi(t) > 0 \text{ при } |t| < 1/2.$$

Функцию $\varphi_r(t)$ будем искать в виде

$$\varphi_r(t) = \sum_{\lambda=0}^{r-1} c_\lambda \psi\left(t - \frac{\lambda}{2r}\right). \quad (20.3)$$

Из условия а') следует, что при любых c_λ функция $\varphi_r(t)$ удовлетворяет условию а).

Лемма 20.1. Коэффициенты c_λ в (20.3) можно подобрать так, что $\varphi_r(t)$ будет удовлетворять условию б).

Доказательство. Из условия б) получается следующая система линейных уравнений для определения коэффициентов c_λ :

$$\sum_{\lambda=0}^{r-1} c_\lambda \int_{-1}^1 \psi\left(t - \frac{\lambda}{2r}\right) t^k dt = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 0, & 1 \leq k \leq r-1. \end{cases} \quad (20.4)$$

Предположим, что определитель системы (20.4) равен нулю. Тогда строки матрицы с элементами $c_{k\lambda} = \int_{-1}^1 \psi\left(t - \frac{\lambda}{2r}\right) t^k dt$, $0 \leq k, \lambda \leq r-1$, линейно зависимы. Это означает, что существует набор чисел p_0, p_1, \dots, p_{r-1} , не равных одновременно нулю, такой, что

$$\sum_{k=0}^{r-1} p_k c_{k\lambda} = P\left(\frac{\lambda}{2r}\right) = 0, \quad 0 \leq \lambda \leq r-1. \quad (20.5)$$

Здесь

$$P(\tau) = \int_{-1}^1 \psi(t-\tau) \left(\sum_{k=0}^{r-1} p_k t^k \right) dt = \int_{-1/2}^{1/2} \psi(t) \left(\sum_{k=0}^{r-1} p_k (t+\tau)^k \right) dt. \quad (20.6)$$

Видно, что $P(\tau)$ — полином степени, не превышающей $r-1$. Равенство (20.5) показывает, что он обращается в нуль в r разных точках, следовательно, $P(\tau) \equiv 0$. Старший коэффициент полино-

на $p(t) = \sum_{0 \leq k < r-1} p_k t^k$ равен старшему коэффициенту полинома $P(\tau)$, деленному на $\pm \int_{-1}^1 \psi(t) dt \neq 0$. Поэтому $p(t) \equiv 0$ и все $p_k = 0$, $0 \leq k \leq r-1$. ■

Построение $X_{N,r}(x)$. Положим $r_1 = (r+1)(r+2)$ и выберем натуральное число \tilde{N} из интервала $[(2r_1)^{-1}N, r_1^{-1}N]$. Будем считать, что $N \geq 2r_1$. Построим ядро Дирихле:

$$D_{\tilde{N}}(x) = \sum_{|n| \leq \tilde{N}} e^{in2\pi x} = \frac{\sin(2\pi N'x)}{\sin(\pi x)}, \quad (20.7)$$

где для краткости введено обозначение $N' = \tilde{N} + 1/2$. Рассмотрим функцию

$$\psi_N(x) = c_N (N')^{-r_1+1} (D_{\tilde{N}}(x))^{r_1}. \quad (20.8)$$

Постоянную c_N найдем из условия $\int_0^1 \psi_N(x) dx = 1$.

Лемма 20.2.

$$c_N = \frac{1}{|\mathcal{D}|} + O(N^{-1}), \quad (20.9)$$

где $|\mathcal{D}|$ — объем области \mathcal{D} в \mathbb{R}^{r_1-1} , задаваемой неравенствами

$$|t_1 + t_2 + \dots + t_{r_1-1}| \leq 1, \quad |t_i| \leq 1, \quad 1 \leq i \leq r_1-1.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_0^1 (D_{\tilde{N}}(x))^{r_1} dx = \sum_{\substack{\sum_{i=1}^{r_1} n_i = 0, \\ |n_i| \leq \tilde{N}}} 1. \quad (20.10)$$

Введем координаты $t_i = n_i (\tilde{N})^{-1}$. Тогда сумма в (20.10) будет равна числу точек из множества \mathcal{D} с рациональными координатами вида $n_i (\tilde{N})^{-1}$. Это число равно сумме (r_1-1) -мерного объема тела \mathcal{D} , деленного на объем элементарной ячейки, равный \tilde{N}^{-r_1+1} , и погрешности порядка (r_1-2) -мерного объема границы \mathcal{D} , деленного на объем элементарной ячейки размерности r_1-2 . ■

В следующей лемме $\alpha = 1 - 1/(r+1)$. Будем считать, что $N^{-\alpha} < 1/2$.

Лемма 20.3.

а) При $1/2 \geq |x| > N^{-\alpha}$

$$\psi_N(x) = O(N^{-r-1}).$$

б) При $|x| \leq N^{-\alpha}$

$$\Psi_N(x) = c_N N' \chi^{r_1}(N'x) + O(N^{-\alpha}),$$

где

$$\chi(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}.$$

Доказательство. а) В этом случае

$$|D_N(x)| \leq |\sin \pi x|^{-1} \leq (2|x|)^{-1} \leq 2^{-1} N^\alpha,$$

$$|\Psi_N(x)| \leq 2^{-r_1} c_N (N')^{-r_1+1} N^{\alpha r_1} = O(N^{-r-1}),$$

так как $-r_1+1+\alpha r_1 = -r-1$.

б) При $|x| \leq 1/2$ непосредственно проверяется, что

$$\left| \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi x} \right| \leq \frac{\pi^2}{12} |x|.$$

Поэтому $D_N(x) = N' \chi(N'x) + f(x)$, где $|f(x)| \leq \frac{\pi^2}{12} |x|$ при $|x| \leq 1/2$. Для $\Psi_N(x)$ имеем

$$\begin{aligned} \Psi_N(x) &= c_N N' \chi^{r_1}(N'x) + \\ &+ c_N (N')^{-r_1+1} \sum_{k=0}^{r_1-1} c_{r_1}^k (N')^k \chi^k(N'x) f^{r_1-k}(x). \end{aligned} \quad (20.11)$$

Оценивая почленно сумму в правой части (20.11) и учитывая оценку $|\chi^k(N'x)| \leq 2^k$, получаем, что при $|x| \leq N^{-\alpha}$ погрешность имеет порядок

$$\sum_{k=0}^{r_1-1} O(N^{-r_1+1+k-\alpha r_1+\alpha k}) = O(N^{-\alpha}). \blacksquare$$

Продолжим построения. Фиксируем некоторый набор $\{b_k(x), 0 \leq k \leq r-1\}$ гладких функций, периодических с периодом 1, положив $b_0(x) = 1$ и подчинив $b_k(x), k \geq 1$, условию $b_k(x) = x^k$ при $|x| \leq 1/4$. Определим теперь сглаживающее ядро $X_{N,r}(x)$ формулой

$$X_{N,r}(x) = \sum_{\lambda=0}^{r-1} \alpha_\lambda \Psi_N\left(x - \frac{\lambda}{2rN'}\right), \quad (20.12)$$

где коэффициенты α_λ подбираются из условия

$$\int_0^1 X_{N,r}(x) b_k(x) dx = \begin{cases} 1, & k=0; \\ 0, & 1 \leq k \leq r-1. \end{cases} \quad (20.13)$$

Лемма 20.4. Существуют положительные постоянные $c_2^{(r)}$ и $c_3^{(r)}$, такие, что при $N > c_2^{(r)}$ из условий (20.13) однозначно определяются коэффициенты α_λ , причем $|\alpha_\lambda| \leq c_3^{(r)}$, $0 \leq \lambda \leq r-1$.

Доказательство. Уравнения (20.13) для определения постоянных можно записать в виде

$$\sum_{\lambda=0}^{r-1} c_{k\lambda} \alpha_\lambda = \delta_{k0}, \quad 0 \leq k \leq r-1, \quad (20.14)$$

где $c_{0\lambda} = 1$, а при $k \geq 1$

$$c_{k\lambda} = (N')^k \int_0^1 \psi_N(x) b_k \left(x + \frac{\lambda}{2rN'} \right) dx. \quad (20.15)$$

Используя оценки леммы 20.3, получаем

$$c_{k\lambda} = \int_{-N^{-\alpha}}^{N^{-\alpha}} c_N (N')^{1+k} \chi^{r_1}(N'x) \left(x + \frac{\lambda}{2rN'} \right)^k dx + O\left(N^{-\frac{1}{r+1}}\right). \quad (20.16)$$

Так как $|\chi^{r_1}(N'x)| \leq |\pi N'x|^{-r_1}$, то

$$\int_{|x| > N^{-\alpha}} \chi^{r_1}(N'x) \left(x + \frac{\lambda}{2rN'} \right)^k dx = O\left(N^{\alpha(r_1-k-1)-r_1}\right). \quad (20.17)$$

Используя оценки (20.17) и (20.9), приведем выражение (20.16) к виду

$$c_{k\lambda} = c_{k\lambda}^{(0)} + O\left(N^{-\frac{1}{r+1}}\right), \quad (20.18)$$

где $c_{k\lambda}^{(0)} = \frac{1}{|D|} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{r_1}(t) \left(t + \frac{\lambda}{2r} \right)^k dt. \quad (20.19)$

Рассуждения, в точности повторяющие те, которые проводились при доказательстве леммы 20.1, показывают, что определитель матрицы $\{c_{k\lambda}^{(0)}, 0 \leq k, \lambda \leq r-1\}$ не равен нулю (здесь $c_{0\lambda}^{(0)} = 1$). Из выражения (20.18) следует оценка

$$\det \{c_{k\lambda}\} = \det \{c_{k\lambda}^{(0)}\} + O\left(N^{-\frac{1}{r+1}}\right),$$

из которой следует утверждение леммы. ■

Исследуем свойства построенного оператора $\mathbb{T}_{NN'}^{(r)}$. Непосредственно из построения вытекает следующее утверждение.

Лемма 20.5. а) Коэффициенты Фурье функции $(T_{NM}^{(r)} h)(x, y)$ при разложении по функциям $e^{i2\pi nx}$ равны нулю при $|n| > N$.

б) Если $h(x, y) = 0$ при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times [\alpha, \beta]$ и $\beta - \alpha > 2M^{-1}$, то $(T_{NM}^{(r)} h)(x, y) = 0$ при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times [\alpha + M^{-1}, \beta - M^{-1}]$.

Потребуется еще два свойства оператора T_{NM} , сформулированные в следующей лемме.

Лемма 20.6. Существует положительная постоянная $c_4^{(r)}$, такая, что

$$\text{а) } |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} T_{NM}^{(r)} h| \leq c_4^{(r)} N^{\rho_1+1} M^{\rho_2} \max_{x,y} |h|, \quad 0 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq r+2,$$

б) если $r' \leq r$, то

$$|h - T_{NM}^{(r)} h| \leq c_4^{(r)} \max_{\substack{\rho_1 + \rho_2 = r' \\ x, y}} N^{-\rho_1} M^{-\rho_2} |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} h|.$$

Доказательство. Дифференцируя (20.8), получаем

$$D_x^{\rho_1} \psi_N(x) = (N')^{-r_1+1} \sum_{\{\alpha_i\}} c_{\{\alpha_i\}} \prod_{i=0}^{\rho_1} [D_N^{(i)}(x)]^{\alpha_i}. \quad (20.20)$$

В формуле (20.20) суммирование распространяется на все наборы натуральных чисел, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i=0}^{\rho_1} \alpha_i = r_1, \quad \sum_{i=0}^{\rho_1} i \alpha_i = \rho_1. \quad (20.21)$$

Учитывая очевидную оценку $D_N^{(i)}(x) = O(N^{i+1})$, равенство (20.21), определение функции χ_N и оценку коэффициентов α_i , данную в лемме 20.4, получаем оценку

$$D_x^{\rho_1} \chi_N(x) = O(N^{\rho_1+1}). \quad (20.22)$$

Кроме того, очевидна оценка

$$D_y^{\rho_2} Y_M(y) = O(M^{\rho_2+1}). \quad (22.23)$$

Дифференцируя (20.1) под знаком интеграла, учитывая (20.22), (22.23) и тот факт, что $Y_M(y) = 0$ при $|y| \geq M^{-1}$, получаем оценку а).

Применим к функции h формулу Тейлора:

$$h(x+\xi, y+\eta) = \sum_{k_1+k_2 < r'} b_{k_1 k_2}(\xi, \eta) \eta^{k_2} h_{k_1 k_2}(x, y) + a_{r'}(x, y, \xi, \eta), \quad (20.24)$$

$$\text{где } |a_{r'}| \leq \text{const} \cdot \sum_{\rho_1+\rho_2=r'} |\xi|^{\rho_1} |\eta|^{\rho_2} \max_{x,y} |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} h|. \quad (20.25)$$

Используя свойство (20.13) и аналогичное свойство функции $Y_M(\eta)$, получаем оценку

$$\begin{aligned} |h - \mathbb{T}_{NM}^{(r)} h| &\leq \max_{x,y} \iint |X_{N,r}(\xi) Y_{M,r}(\eta)| \times \\ &\times |a_{r'}(x, y, \xi, \eta)| d\xi d\eta \leq \text{const} \cdot \max_{\substack{\rho_1+\rho_2=r' \\ x,y}} \left\{ |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} h| \times \right. \\ &\times \left. \int_{-1/2}^{1/2} |\xi|^{\rho_1} |X_{N,r}(\xi)| d\xi \int |\eta|^{\rho_2} |Y_{M,r}(\eta)| d\eta \right\}. \quad (20.26) \end{aligned}$$

Остается оценить интегралы, стоящие в правой части (20.26). Из формулы (20.2) сразу получается, что

$$\int |\eta|^{\rho_2} |Y_{M,r}(\eta)| d\eta = O(M^{-\rho_2}). \quad (20.27)$$

Для оценки другого интеграла достаточно оценить выражение

$$\int_0^1 \psi_N(\xi) \left(\xi + \frac{\lambda}{2\lambda N'} \right)^{\rho_1} d\xi = \sum_{k=0}^{\rho_1} c_{\rho_1}^k \left(\frac{\lambda}{2r} \right)^{\rho_1-k} N'^{k-\rho_1} \int_0^1 \psi_N(\xi) \xi^k d\xi. \quad (20.28)$$

Используя оценки леммы 20.3, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi_N(\xi) \xi^k d\xi &= c_N \int_{|\xi| \leq N^{-\alpha}} N' \chi^{r_1}(N'\xi) \xi^k d\xi + \\ &+ O(N^{-\alpha}) \int_{|\xi| \leq N^{-\alpha}} \xi^k d\xi + O(N^{r-1}) \int_{1/2 \geq \xi \geq N^{-\alpha}} \xi^k d\xi = \\ &= O(N^{-k}) + O(N^{-\alpha(k+2)}) + O(N^{-r-1}) = O(N^{-k}). \quad (20.29) \end{aligned}$$

Собирая вместе оценки (20.26)–(20.29), получаем утверждение б) леммы.

§ 21. Разностное уравнение

Рассмотрим уравнение

$$\omega(x+y, y) - \omega(x, y) = h(x, y), \quad (21.1)$$

где $h(x, y)$ — гладкая функция, заданная на $\Pi_{\tilde{a}, \tilde{b}}$, $a \leq \tilde{a} < \tilde{b} \leq b$. Будем искать функцию ω , также заданную на $\Pi_{\tilde{a}, \tilde{b}}$. Если не сделать никаких предположений относительно $h(x, y)$, то непрерывного решения может и не быть. Введем обозначение $[f] = \int_0^1 f(x, y) dx$. Интегрируя уравнение (21.1) по x , получаем, что равенство $[h] = 0$ является необходимым условием разрешимости уравнения (21.1) в классе непрерывных функций.

Лемма 21.1. Пусть гладкая функция $h(x, y)$ обладает следующими свойствами:

- а) $[h] = 0$;
- б) $h(x, y) = 0$, если $y \notin E_N''$ (определение множества E_N'' было дано в начале § 19);
- в) коэффициенты Фурье функции $h(x, y)$ в разложении по $e^{i2\pi nx}$ равны нулю при $|n| > N$.

Тогда уравнение (21.1) имеет единственное гладкое решение ω , определенное на $\Pi_{\tilde{a}, \tilde{b}}$, удовлетворяющее условию $[\omega] = 0$. Справедлива оценка

$$\left| D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} \omega \right| \leq c_5^{(r)} \max_{\substack{0 \leq k \leq \rho_2 \\ x, y}} (\sqrt{\epsilon})^{-k-1} \left| D_x^{\rho_1+k} D_y^{\rho_2-k} h \right| N^{(k+1)\sigma+1}, \quad (21.2)$$

$$0 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq r+2.$$

Доказательство. Единственность следует из того, что при иррациональном y однородное уравнение $u(x+y) - u(x) = 0$ имеет единственное интегрируемое решение со средним значением, равным нулю, а именно решение, тождественно равное нулю. Поэтому гладкое решение (со средним значением, равным нулю) на всем $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ единственно (иррациональные числа плотны в $[\tilde{a}, \tilde{b}]$). Существование и оценка (21.2) доказываются исследованием явного выражения для решения

$$\omega(x, y) = \sum_{0 < |n| \leq N} \frac{h_n(y)}{\exp(in 2\pi y)} \exp(in 2\pi x), \quad (21.3)$$

где

$$h_n(y) = \int_0^1 e^{-in 2\pi x} h(x, y) dx. \quad (21.4)$$

Так как $h_n(y) = 0$ при $y \notin E_n''$, то $\omega(x, y)$ также равно нулю при этих значениях y . Если $y \in E_n''$, то

$$|(\exp(in 2\pi y) - 1)^{-1}| \leq \frac{1}{4} |ny - m_n|^{-1} \leq (\sqrt{\varepsilon})^{-1} |n|^{-1}. \quad (21.5)$$

Оценка (21.5) показывает, что $(\exp(in 2\pi y) - 1)^{-1}$ — ограниченная гладкая функция в окрестности множества, на котором $h_n(y) \neq 0$. Поэтому функция $\omega(x, y)$ принадлежит классу C^∞ . Докажем оценку (21.2). Дифференцируя (21.3), получаем

$$D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} \omega(x, y) = \sum_{0 < |n| \leq N} \sum_{k=0}^{\rho_2} C_{\rho_2}^k h_n^{(\rho_2-k)}(y) \times \\ \times \frac{d^k}{dy^k} (\exp(in 2\pi y) - 1)^{-1} (i 2\pi n)^{\rho_1} \exp(in 2\pi x). \quad (21.6)$$

Легко доказать, по индукции, что

$$\frac{d^k}{dy^k} (\exp(in 2\pi y) - 1)^{-1} = (in 2\pi)^k (\exp(in 2\pi y) - 1)^{-1} P_k(e^{in 2\pi y}), \quad (21.7)$$

P_k — полином степени k . Кроме того,

$$\left| h_n^{(\rho_2-k)}(y) (in 2\pi)^{\rho_1+k} \right| \leq \max_{x, y} \left| D_x^{\rho_1+k} D_y^{\rho_2-k} h \right|. \quad (21.8)$$

Из (21.5)–(21.8) следует оценка (21.2). То, что функция $\omega(x, y)$, определяемая формулой (21.3), удовлетворяет уравнению (21.1), проверяется непосредственной подстановкой.

§ 22. Описание итерационного процесса

Образование $\Sigma: \Pi_{a', b'} \rightarrow \Pi_{a, b}$, существование которого утверждается в теореме, получим как предел $\Sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n$, где $\Sigma_n: \Pi_{a_n, b_n} \rightarrow \Pi_{a, b}$, $n=1, 2, \dots$, — гладкое отображение, определяемое формулой

$$\Sigma_n = R_0 \circ R_1 \circ \dots \circ R_{n-1}, \quad (22.1)$$

где, в свою очередь,

$$R_k: \Pi_{a_{k+1}, b_{k+1}} \rightarrow \Pi_{a_k, b_k}, \quad k=0, 1, \dots, \quad (22.2)$$

- гладкое отображение, имеющее вид $(\xi, \eta) \mapsto (x, y)$,

$$x = \xi + u_k(\xi, \eta) \pmod{1}, \quad (22.3)$$

$$y = \eta + v_k(\xi, \eta).$$

Числа a_n, b_n , определяющие полосу, в которой задано преобразование Σ , образуют две монотонные последовательности, причем выполнены соотношения

$$\begin{aligned} a_0 = a, \quad a_{n+1} > a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a' \in E, \\ b_0 = b, \quad b_{n+1} < b_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b' \in E. \end{aligned} \quad (22.4)$$

Числа a_n и b_n будут определены в следующем параграфе. Пусть по определению E_0 - тождественное отображение $\Pi_{a,b}$ на себя, $a_{-1} = -\infty, b_{-1} = +\infty$. Преобразование

$$T_n = \Sigma_n^{-1} \circ T \circ \Sigma_n, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

диффеоморфно отображает Π_{a_n, b_n} на некоторую часть $\Pi_{a_{n-1}, b_{n-1}}$ и в координатной форме имеет вид $(x, y) \mapsto (x_1, y_1)$,

$$x_1 = x + y + \sqrt{\varepsilon} f_n(x, y) \pmod{1}, \quad (22.5)$$

$$y_1 = y + \varepsilon g_n(x, y).$$

Функции u_k и v_k , входящие в (22.3), определим как гладкие, периодические по ξ с периодом 1 решения системы

$$u_k(\xi + \eta, \eta) - u_k(\xi, \eta) = \sqrt{\varepsilon} \hat{f}_k(\xi, \eta) + v_k(\xi, \eta), \quad (22.6)$$

$$v_k(\xi + \eta, \eta) - v_k(\xi, \eta) = \varepsilon (\hat{g}_k(\xi, \eta) - [\hat{g}_k](\eta)),$$

где

$$\hat{f}_k = T_{N_{k+1}, M_{k+1}}^{(r_k)} \theta_{N_{k+1}, M_k} f_k, \quad (22.7)$$

$$\hat{g}_k = T_{N_{k+1}, M_{k+1}}^{(r_k)} \theta_{N_{k+1}, M_k} g_k.$$

Числа $N_k > 1$ и $M_k > 1$ образуют две возрастающие последовательности. Предпишем следующие соотношения между ними:

$$M_k = (\sqrt{\varepsilon})^{-1} N_k^{\nu}, \quad (22.8)$$

$$N_{k+1} = N_k^x, \quad (22.9)$$

$$x = 2 - \frac{2\sigma + 5}{3(\sigma + 2)}, \quad (22.10)$$

$$v = (\sigma + 2)x. \quad (22.11)$$

Последовательность r_k в выражениях (22.7) есть медленно растущая последовательность натуральных чисел, которая будет определена в ходе дальнейших построений, $r_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, r_0 определяется формулой (5.9).

Введем также в рассмотрение убывающую последовательность

$$\delta_k = N_k^{-\mu_k} \quad (22.12)$$

где μ_k — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, определяемая далее в процессе вычисления итераций, $\mu_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$. Положим

$$\mu_0 = 3xv. \quad (22.13)$$

На каждом шаге при $\eta \in \text{supp } \theta_{N_{k+1}, M_k}$ будут выполнены следующие неравенства:

$$|f_k(\xi, \eta)| + |g_k(\xi, \eta)| \leq \delta_k, \quad (22.14)$$

$$|D_\xi^{\rho_1} D_\eta^{\rho_2} N_k f_k(\xi, \eta)| + |D_\xi^{\rho_1} D_\eta^{\rho_2} N_k^v g_k(\xi, \eta)| \leq N_k^{\rho_1} M_k^{\rho_2}, \quad (22.15)$$

$$1 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq r_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В следующих двух параграфах, предполагая справедливость оценок (22.14), (22.15) на каждом шаге итерационного процесса, покажем, что описанный итерационный процесс сходится к отображению \tilde{E} класса C^∞ , обладающему нужными свойствами. В частности, из неравенства (22.14) следует, что отображение \tilde{E} сопрягает T и T_0 на множестве $\Pi_{a', b'}$.

В последующих параграфах будет показано, что оставшимися свободными параметрами $N_0, \{r_k\}_{k \geq 1}, \{\mu_k\}_{k \geq 1}$ можно распорядиться таким образом, чтобы на каждом шаге итерационного процесса выполнялись оценки (22.14), (22.15), если они выполнены при $k=0$. При $k=0$ эти оценки выполнены, если в (5.8) $\delta = \delta_0 = N_0^{-\mu_0} < 1$.

§ 23. Оценки для u_k и v_k . Выбор чисел α_{k+1}, b_{k+1}

Покажем сначала, что при достаточно больших N_0 из уравнения (22.6) можно определить функции u_k, v_k , которые определяются однозначно, если потребовать, чтобы

$$[u_k] = 0. \quad (23.1)$$

Правая часть второго из уравнения (22.6) определена в полосе $a_k + M_{k+1}^{-1} \leq \eta \leq b_k - M_{k+1}^{-1}$ и удовлетворяет условию а) леммы 21.1. Утверждение 4) леммы 19.1 и утверждение б) леммы 20.5 показывают, что правая часть второго из уравнений (22.6) равна нулю на интервалах смежности к $E''_{N_{k+1}}$, если только

$$\frac{1}{4} \sqrt{\epsilon} N_{k+1}^{-\sigma-1} > M_{k+1}^{-1}, \quad (23.2)$$

т.е. в этом случае удовлетворяется условие б) леммы 21.1 для $N = N_{k+1}$. Соотношение (22.8) показывает, что неравенство (23.2) выполняется, если N_0 достаточно велико. Условие в) леммы 21.1 также выполняется для $N = N_{k+1}$ в силу утверждения а) леммы 20.5. Применяя ко второму уравнению (22.6) лемму 21.1, получаем, что оно имеет единственное гладкое решение \tilde{v}_k , удовлетворяющее условию $[\tilde{v}_k] = 0$ и оценкам

$$\begin{aligned} |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} \tilde{v}_k| &\leq c_5^{(r_k)} \max_{\substack{0 \leq j \leq \rho_2 \\ x, y}} (\sqrt{\epsilon})^{2-j-1} N_{k+1}^{(j+1)\sigma+1} \times \\ \times |D_x^{\rho_1+j} D_y^{\rho_2-j} (\hat{g}_k - [\hat{g}_k])| &\leq 2c_5^{(r_k)} c_4^{(r_k)} \sqrt{\epsilon} N_{k+1}^{\sigma+2+\rho_1} M_{k+1}^{\rho_2} \delta_k, \end{aligned} \quad (23.3)$$

$$0 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq r_k + 2.$$

Для разрешимости первого из уравнений (22.6) необходимо выполнение равенства $[v_k] = -\sqrt{\epsilon} [\hat{f}_k]$. Поэтому надо положить

$$u_k = \tilde{v}_k - \sqrt{\epsilon} [\hat{f}_k]. \quad (23.4)$$

Из (23.3) и утверждения а) леммы 20.6 следует оценка

$$|D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} u_k| \leq c_6^{(r_k)} \sqrt{\epsilon} N_{k+1}^{\rho_1+\sigma+2} M_{k+1}^{\rho_2} \delta_k, \quad (23.5)$$

$$0 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq r_k + 2.$$

Аналогично предыдущему убеждаемся, что при выполнении неравенства (23.2) правая часть первого из уравнений (22.6) удовлетворяет всем условиям леммы 21.1 и потому имеет гладкое решение u_k , удовлетворяющее условию (23.1) и оценкам

$$\left| D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} u_k \right| \leq c_7^{(r_k)} N_{k+1}^{\rho_1+2\sigma+3} M_{k+1}^{\rho_2} \delta_k, \quad (23.6)$$

$$0 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq r_k + 2.$$

Фиксируем число ι из интервала $]0, (2\sigma+3)(1-\varepsilon^{-1})[$ и потребуем, чтобы при всех k выполнялось неравенство

$$(c_6^{(r_k)} + c_7^{(r_k)}) N_0^{-\varepsilon^{k+2}\iota} < 1. \quad (23.7)$$

При $k=0$ условию (23.7) можно удовлетворить, выбрав достаточно большое N_0 , при $k>0$ это условие есть ограничение на скорость роста последовательности $\{r_k\}$.

Обозначим $w_k = (u_k, v_k)$. Определим полуноормы

$$|w|_\rho = \max_{\substack{\rho_1+\rho_2=\rho \\ x,y}} (\sqrt{\varepsilon})^{\rho_2} |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} u| + \max_{\substack{\rho_1+\rho_2=\rho \\ x,y}} (\sqrt{\varepsilon})^{\rho_2-1} |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} v|, \quad (23.8)$$

$$\rho = 0, 1, 2, \dots$$

Используя неравенство (23.7) и определение (23.8), оценки (23.5) и (23.6) можно переписать в следующем виде:

$$|w_k|_\rho < N_0^{-\varepsilon^k(\mu_k - \varepsilon(2\sigma+3+\nu\rho) - \varepsilon^2\iota)}, \quad (23.9)$$

$$0 \leq \rho \leq r_k + 2.$$

В частности, при $\rho=0$ и $\rho=1$, используя неравенство $\mu_k \geq \mu_0 = 3\varepsilon\nu$, из (23.9) получаем

$$|u_k| + (\sqrt{\varepsilon})^{-1} |v_k| < N_0^{-\varepsilon^{k+2}(\sigma+3)}, \quad (23.10)$$

$$|u'_{k\xi}| + \sqrt{\varepsilon} |u'_{k\eta}| + (\sqrt{\varepsilon})^{-1} |v'_{k\xi}| + |v'_{k\eta}| < N_0^{-\varepsilon^{k+2}}. \quad (23.11)$$

Построенные функции u_k и v_k определены в полосе $\alpha_k + M_{k+1}^{-1} \leq \eta \leq b_k - M_{k+1}^{-1}$. Преобразование R_k , определяемое

формулами (22.3), отображает $\Pi_{a_k - M_{k+1}^{-1}, b_k - M_{k+1}}$ в Π . Из оценок (23.11) следует, что при больших N_0 якобиан преобразования (22.3) мало отличается от единицы. Поэтому R_k - диффеоморфизм $\Pi_{a_k + M_{k+1}^{-1}, b_k - M_{k+1}^{-1}}$ на $R_k(\Pi_{a_k + M_{k+1}^{-1}, b_k - M_{k+1}^{-1}})$.

Следующая лемма есть прямое следствие леммы 5.1.

Лемма 23.1. Пусть числа $\varepsilon > 0$, α и β удовлетворяют оценкам

$$4\sqrt{\varepsilon} < 1 - \sigma^{-1}, \quad (23.12)$$

$$\beta - \alpha > 6\sqrt{\varepsilon}(1 - \sigma^{-1})^{-1}. \quad (23.13)$$

Тогда интервал $[\alpha, \beta]$ содержит бесконечное множество точек из $E_{\sigma, \sqrt{\varepsilon}}$.

Число ε в условиях теоремы удовлетворяет оценке (23.12).

Числа a_k, b_k , как будет показано в следующем параграфе, таковы, что $b_k - a_k$ больше правой части (23.13).

Пусть a'_k и b'_k - числа из множества E , лежащие в интервале $[a_k + M_{k+1}^{-1} + \sqrt{\varepsilon} N_0^{-\alpha^{k+2}(\sigma+3)} + \varepsilon \delta_k, b_k - M_{k+1}^{-1} - \varepsilon \delta_k - \sqrt{\varepsilon} N_0^{-\alpha^{k+2}(\sigma+3)}]$, ближайшим соответственно к левому и правому концам интервала. Неравенства (23.5) и (22.14) показывают, что

$$T_k(\Pi_{a'_k, b'_k}) \subset R_k(\Pi_{a_k + M_{k+1}^{-1}, b_k - M_{k+1}^{-1}}). \quad (23.14)$$

Положим

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a'_k + \sqrt{\varepsilon} N_0^{-\alpha^{k+2}(\sigma+3)}, \\ b_{k+1} &= b'_k - \sqrt{\varepsilon} N_0^{-\alpha^{k+2}(\sigma+3)}. \end{aligned} \quad (23.15)$$

Тогда имеет место включение $R_k(\Pi_{a_{k+1}, b_{k+1}}) \subset \Pi_{a'_k, b'_k}$, а преобразование $T_{k+1} = R_k^{-1} \circ T_k \circ R_k$ определено на $\Pi_{a_{k+1}, b_{k+1}}$ и отображает $\Pi_{a_{k+1}, b_{k+1}}$ в $\Pi_{a_k + M_{k+1}^{-1}, b_k - M_{k+1}^{-1}}$.

§ 24. Доказательство сходимости итерационного процесса и оценки функций $U(\xi, \eta)$ и $V(\xi, \eta)$

Из построений предыдущего параграфа следует, что $a_k \nearrow a' \in E$ и $b_k \searrow b' \in E$ при $k \rightarrow \infty$. Оценим разность $a' - a$. Из (23.10) следует, что

$$a' - a \leq \text{mes}(]a, a'[\setminus E) + \sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon \delta_k + M_{k+1}^{-1} + 2\sqrt{\varepsilon} N_0^{-\alpha k + 2(\sigma+3)}). \quad (24.1)$$

При $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} N_0^{-\alpha k} &\leq N_0^{-\alpha} + \int_0^{\infty} N_0^{-\alpha x} dx \leq \\ &\leq N_0^{-\alpha} + \frac{1}{\alpha \log x \log N_0} N_0^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (24.2)$$

Учитывая оценку (5.4), из (24.1) и (24.2) получаем

$$a' - a \leq \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1-\sigma^{-1}} (a' - a + 2\varepsilon + 1) + \sqrt{\varepsilon} c_3 N_0^{-\alpha(\sigma+3)}. \quad (24.3)$$

Оценке для $b - b'$ имеет аналогичный вид. Общий результат записывается в виде

$$|a' - a| + |b' - b| \leq c_1 \sqrt{\varepsilon}. \quad (24.4)$$

Очевидно, что при достаточно малых ε , а именно при

$$\sqrt{\varepsilon} < \frac{b - a}{c_1 + 6(1 - \sigma^{-1})^{-1}}, \quad (24.5)$$

разность $b' - a'$ больше правой части (23.13).

Это рассуждение можно провести для чисел a_k и b_k вместо a' и b' , рассматривая в правой части (24.1) конечную сумму вместо бесконечной. Получим обещанную в § 23 оценку

$$b_k - a_k > 6\sqrt{\varepsilon} (1 - \sigma^{-1})^{-1}. \quad (24.6)$$

Покажем, что последовательность $\Sigma_n | \Pi_{a', b'}$ сходится с производными любого порядка к преобразованию $\Sigma: \Pi_{a', b'} \rightarrow \Pi_{a, b}$. Преобразование Σ_n , определяемое формулой (22.1), имеет вид

$$(\xi, \eta) \mapsto (\xi + U_n(\xi, \eta) \pmod{1}, \eta + V_n(\xi, \eta)). \quad (24.7)$$

Функции U_n и V_n заданы в полосе $\alpha_n \leq \eta \leq b_n$ и удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$U_{n+1}(\xi, \eta) - U_n(\xi + u_n(\xi, \eta), \eta + v_n(\xi, \eta)) = u_n(\xi, \eta), \quad (24.8)$$

$$V_{n+1}(\xi, \eta) - V_n(\xi + u_n(\xi, \eta), \eta + v_n(\xi, \eta)) = v_n(\xi, \eta).$$

По определению $U_0 = 0$, $V_0 = 0$.

Из (23.10) сразу следует равномерная сходимость $U_n(\xi, \eta) \rightarrow U(\xi, \eta)$ и $V_n(\xi, \eta) \rightarrow V(\xi, \eta)$ в полосе $\alpha' \leq \eta \leq b'$. Неравенство (24.2) показывает, что для предельных функций справедливы оценки

$$\begin{aligned} |U| &\leq c_3 N_0^{-x^2(\sigma+3)}, \\ |V| &\leq c_3 \sqrt{\varepsilon} N_0^{-x^2(\sigma+3)}, \end{aligned} \quad (24.9)$$

откуда следует оценка (5.12) при $\rho_1 = \rho_2 = 0$.

Для оценки производных потребуется следующая лемма о производных суперпозиции. Для гладкого отображения $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, где Ω_1 и Ω_2 - области в \mathbb{R}^2 , определим полунормы

$$\begin{aligned} \|f\|_\rho &= \max_{\substack{1 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq \rho \\ x, y}} |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} f_1| + \\ &+ \max_{\substack{1 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq \rho \\ x, y}} |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} f_2|; \quad f = (f_1, f_2). \end{aligned} \quad (24.10)$$

Лемма 24.1. Существует последовательность абсолютных постоянных $c^{(\rho)}$, $\rho = 1, 2, \dots$, такая, что для любой пары отображений f, g :

$$\Omega_1 \xrightarrow{g} \Omega_2 \xrightarrow{f} \Omega_3,$$

справедлива оценка

$$\|f \circ g\|_\rho \leq \|f\|_\rho \|g\|_1^{\rho + c^{(\rho)}} \|g - \text{Id}\|_\rho \|f\|_\rho \left(\sum_{k=1}^{\rho} \|g\|_\rho^{k-1} \right). \quad (24.11)$$

Здесь Id - тождественное отображение $(x, y) \mapsto (x, y)$, $c^{(1)} = 0$.

Доказательство. Вычислим производную сложной функции

$$D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} (f \circ g)_\alpha = \sum_{1 \leq k_1 + k_2 \leq \rho_1 + \rho_2} (D_1^{k_1} D_2^{k_2} f_\alpha) \circ g \times \\ \times \sum C_{\{\lambda_i, \mu_i, \delta_j, \epsilon_j\}} \prod_{i=1}^{k_1} D_x^{\lambda_i} D_y^{\mu_i} g_1 \prod_{j=1}^{k_2} D_x^{\delta_j} D_y^{\epsilon_j} g_2. \quad (24.12)$$

Во второй сумме в (24.12) суммирование происходит по всем наборам натуральных чисел $\{\lambda_i, \mu_i, \delta_j, \epsilon_j, 1 \leq i \leq k_1, 1 \leq j \leq k_2\}$, удовлетворяющих соотношениям

$$\lambda_i + \mu_i \geq 1, \quad \delta_j + \epsilon_j \geq 1, \\ \sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i + \sum_{j=1}^{k_2} \delta_j = \rho_1, \\ \sum_{i=1}^{k_1} \mu_i + \sum_{j=1}^{k_2} \epsilon_j = \rho_2. \quad (24.13)$$

Выделим из этого множества наборов один, у которого $\lambda_i = 1, \mu_i = 0, 1 \leq i \leq k_1, \delta_j = 0, \epsilon_j = 1, 1 \leq j \leq k_2$. Из соотношений (24.13) следует, что в этом случае $k_1 = \rho_1, k_2 = \rho_2$. Нетрудно убедиться, что для выделенного набора постоянная $C_{\{\lambda_i, \mu_i, \delta_j, \epsilon_j\}}$ равна единице.

Заметим, что при $\rho = 1$ правая часть (24.12) содержит всего лишь один член, и этот член соответствует выделенному набору.

Если набор $\{\lambda_i, \mu_i, \delta_j, \epsilon_j\}$ не совпадает с выделенным, то либо для некоторой пары (λ_i, μ_i) из этого набора

$$D_x^{\lambda_i} D_y^{\mu_i} g_1 = D_x^{\lambda_i} D_y^{\mu_i} (g_1 - x), \quad (24.14)$$

либо для некоторой пары (δ_j, ϵ_j)

$$D_x^{\delta_j} D_y^{\epsilon_j} g_2 = D_x^{\delta_j} D_y^{\epsilon_j} (g_2 - y). \quad (24.15)$$

Из равенств (24.14) и (24.15) следует, что член во второй сумме в (24.12), отвечающий невыделенному набору, оценивается сверху величиной

$$\|g - \text{Id}\|_\rho \prod_{i=1}^{k_1} \|g\|_{\lambda_i + \mu_i} \prod_{j=1}^{k_2} \|g\|_{\delta_j + \epsilon_j} \leq \\ \leq \|g - \text{Id}\|_\rho \|g\|_\rho^{k_1 + k_2 - 1}. \quad (24.16)$$

Штрихи у знаков произведения означают, что в одном из них вычеркнут член, соответствующий (24.14), (24.15). Оценка (24.11) следует из (24.12) и (24.16). ■

Оценивая производные функций U_n, V_n , удобно использовать полунормы, содержащие $\sqrt{\varepsilon}$. Как и в § 23, будем обозначать $W_n = (U_n, V_n)$ и $\omega_n = (u_n, v_n)$. Определим полунорму

$$\|W\|_\rho = \sum_{k=1}^{\rho} |W|_k, \quad (24.17)$$

где $|W|_k$ определяется формулой (23.8).

Утверждение леммы 24.1 справедливо и для полунорм (24.17). Для того чтобы убедиться в этом, достаточно изменить масштаб, положив

$$\eta = \sqrt{\varepsilon} \bar{\eta}, \quad V = \sqrt{\varepsilon} \bar{V}, \quad v = \sqrt{\varepsilon} \bar{v}.$$

Применим лемму 24.1 к (24.8). Получим

$$\begin{aligned} \|W_{n+1}\|_\rho &\leq \| \omega_n \|_\rho + \| W_n \|_\rho \| \text{Id} + \omega_n \|_1^\rho + \\ &+ c^{(\rho)} \| \omega_n \|_\rho \| W_n \|_\rho \left(\sum_{k=1}^{\rho} \| \text{Id} + \omega_n \|_k^{k-1} \right). \end{aligned} \quad (24.18)$$

Так как μ_n монотонно стремится к $+\infty$, существует число $n_0 = n_0(\sigma; \rho, \alpha)$, обладающее свойством: $n \geq n_0 \Rightarrow \mu_n \geq \rho$ и

$$\mu_n \geq \kappa(\rho^2 + 2\sigma + 3) + \alpha + \kappa^2 \varepsilon. \quad (24.19)$$

Фиксируем $\alpha > 0$. Из (24.18), (23.9) и (24.19) следует, что при $n \geq n_0$

$$\|W_{n+1}\|_\rho \leq c_s^{(\rho)} N_0^{-\kappa^n \alpha} + (1 + c_g^{(\rho)} N_0^{-\kappa^n \alpha}) \|W_n\|_\rho. \quad (24.20)$$

Интерпретируя оценки (24.20), получаем

$$\begin{aligned} \|W_n\|_\rho &\leq \sum_{t=n_0}^{n-1} c_s^{(\rho)} N_0^{-\kappa^t \alpha} \prod_{q=t+1}^{n-1} (1 + c_g^{(\rho)} N_0^{-\kappa^q \alpha}) + \\ &+ \prod_{t=n_0}^{n-1} (1 + c_g^{(\rho)} N_0^{-\kappa^t \alpha}) \|W_{n_0}\|_\rho. \end{aligned} \quad (24.21)$$

В силу неравенства (24.2)

$$\left| \prod_{q=0}^{\infty} (1 + c_g^{(\rho)} N_0^{-\kappa^q \alpha}) - 1 \right| \leq \text{const} \cdot N_0^{-\alpha}. \quad (24.22)$$

В (24.22) const зависит только от ρ, σ и α . Оценка (24.21)

и (24.22) показывают, что производные любого порядка функций U_n и V_n ограничены ϵ -стоящими, не зависящими от n . Поэтому предельные функции U и V имеют производные любого порядка. Переходя к пределу в (24.21), получаем

$$\|W\|_{\rho} \leq \text{const} \cdot (N_0^{-\alpha} + \|W_{n_0}\|_{\rho}). \quad (24.23)$$

Положим $\rho=1$ и $\alpha=x^2$. Из формулы (22.13) следует, что свойство (24.19) для таких α и ρ выполняется при всех n . Используя оценку (23.9) при $\rho=1$, $k=0$, из (24.23) получаем

$$\|W\|_1 \leq c_2 N_0^{-x^2} = c_2 \delta^{\frac{1}{3(\sigma+2)}},$$

т.е. оценка (5.12) выполняется и при $\rho_1 + \rho_2 = 1$.

Для доказательства теоремы остается показать, что число N_0 и последовательности $\{r_k\}$ и $\{\mu_k\}$ можно выбрать так, что при всех k выполняются оценки (22.14) и (22.15). Заметим, что оценки (22.15) пока не были использованы, а из справедливости оценок (22.14) при $k=n$ вытекает справедливость оценок (23.9) при $k=n$.

§ 25. Доказательство оценок (22.14). Выбор последовательности $\{\mu_k\}$

Как уже отмечалось, оценки (22.14) и (22.15) справедливы при $k=0$. Предположим, что они справедливы при $k \leq n-1$. Докажем их при $k=n$. Для упрощения примем новые обозначения, которые будут использованы в этом и следующем параграфах:

$$\begin{aligned} f_{n-1} &= \hat{f}, & g_{n-1} &= \hat{g}, & f_n &= \varphi, & g_n &= \psi, & u_{n-1} &= u, & v_{n-1} &= v, \\ \hat{f}_{n-1} &= \hat{f}, & \hat{g}_{n-1} &= \hat{g}, & N_{n-1} &= N_-, & M_{n-1} &= M_-, & \delta_{n-1} &= \delta_-, \\ N_n &= N, & M_n &= M, & \delta_n &= \delta, & N_{n+1} &= N_+, & r_{n-1} &= r_-, \\ r_n &= r, & \mu_n &= \mu, & \mu_{n-1} &= \mu_-. \end{aligned}$$

Из формул (22.3), (22.5) и (22.6) следуют функциональные уравнения, которым удовлетворяют φ и ψ :

$$\varphi = (\sqrt{\varepsilon})^{-1} (u_1 - \tilde{u}_1) + f(\xi + u, \eta + v) - \hat{f}, \quad (25.1)$$

$$\psi = \varepsilon^{-1} (v_1 - \tilde{v}_1) + g(\xi + u, \eta + v) - \hat{g} + [\hat{g}]:$$

Здесь для краткости обозначили

$$u_1(\xi, \eta) = u(\xi + \eta, \eta), \quad \tilde{u}_1(\xi, \eta) = u(\xi + \eta + \sqrt{\varepsilon} \varphi(\xi, \eta), \eta + \varepsilon \psi(\xi, \eta)).$$

Аналогичный смысл имеет v_1 и \tilde{v}_1 . Из (25.1) имеем

$$\begin{aligned} |\varphi| + |\psi| \leq & (\max |u'_\xi| + (\sqrt{\varepsilon})^{-1} \max |v'_\xi|) |\varphi| + \\ & + (\sqrt{\varepsilon} \max |u'_\eta| + \max |v'_\eta|) |\psi| + |f(\xi + u, \eta + v) - \hat{f}| + \\ & + |g(\xi + u, \eta + v) - \hat{g}| + |[\hat{g}]|. \end{aligned} \quad (25.2)$$

Будем считать, что N_0 таково, что правая часть (23.11) меньше $1/4$. Оценим разность $f(\xi + u, \eta + v) - \hat{f}$. Разность $g(\xi + u, \eta + v) - \hat{g}$ оценивается аналогично. Введем обозначение $x = \xi + u$, $y = \eta + v$. Рассматриваемую разность представим в виде

$$f(x, y) - \hat{f}(\xi, \eta) = I_f + II_f + III_f,$$

где

$$I_f = (1 - \theta_{NM_-}^{\cdot}) f(x, y),$$

$$II_f = (\text{Id} - T_{NM}^{(r_-)}) (\theta_{NM_-} f)(x, y),$$

$$III_f = (T_{NM}^{(r_-)} \theta_{NM_-} f)(x, y) - (T_{NM}^{(r_-)} \theta_{NM_-} f)(\xi, \eta).$$

(Символ Id обозначает тождественный оператор)

Нам надо оценивать I_f , II_f и III_f при $\eta \in \text{supp } \theta_{N_+M}$. Покажем, что в этом случае $y \in \text{supp } \theta_{NM_-}$. Из оценки (23.10) при $k = n - 1$ следует, что

$$|\xi - x| + (\sqrt{\varepsilon})^{-1} |\eta - y| < N^{-\alpha(\sigma+3)}. \quad (25.3)$$

При увеличении N и M множество $\text{supp } \theta_{NM}$ уменьшается. Если $]\alpha, \beta[$ - интервал из дополнения к $\text{supp } \theta_{NM_-}$, то более широкий интервал $]\alpha - M^{-1} + M^{-1}, \beta + M^{-1} - M^{-1}[$ лежит в дополнении к $\text{supp } \theta_{N_+M}$. Этот факт легко установить, рассматривая формулу (19.3). Поэтому для справедливости нашего утверждения достаточно выполнения неравенства

$$|\eta - y| \leq M^{-1} \leq M_-^{-1} - M^{-1}, \quad (25.4)$$

которое верно при больших N_0 , как это следует из оценки (25.3) и соотношений между параметрами (см. формулы (22.8) и (22.9)). Таким образом, $y \in \text{supp } \theta_{NM_-}$ и можем пользоваться оценками (22.14), (22.15) при $k = n - 1$.

Оценка (25.4) показывает, что к выражению $1 - \theta_{NM_-}(y)$ применимо утверждение б) леммы 19.1. Отсюда получаем

$$I_f = 0. \quad (25.5)$$

Утверждение б) леммы 20.6 дает оценку

$$\begin{aligned} |\Pi_f| &\leq c_4^{(r_-)} \max_{\rho_1 + \rho_2 = r_-} (N^{-\rho_1} M^{-\rho_2} c_{10}^{(r_-)} N_-^{\rho_1 - 1} M_-^{\rho_2}) \leq \\ &\leq c_4^{(r_-)} c_{10}^{(r_-)} N_-^{-r_- (\alpha - 1) - 1 + \alpha \mu} \delta. \end{aligned} \quad (25.6)$$

Оценим Π_f , используя утверждение а) леммы 20.6 и неравенства (23.5) и (23.6) при $k = n - 1$:

$$\begin{aligned} |\Pi_f| &\leq \max |\hat{f}'_\xi| \cdot |x - \xi| + \max |\hat{f}'_\eta| \cdot |y - \eta| \leq \\ &\leq c_4^{(r_-)} N^2 \delta_- c_7^{(r_-)} N^{2\sigma + 3} \delta_- + c_4^{(r_-)} MN \delta_- c_6^{(r_-)} \sqrt{\epsilon} N^{\sigma + 2} \delta_- \leq \\ &\leq \frac{1}{2} c_{11}^{(r_-)} (N_-^{-2\mu_- + \alpha \mu + \alpha(2\sigma + 5)} + N_-^{-2\mu_- + \alpha \mu + \alpha(\nu + \sigma + 3)}) \delta \leq \\ &\leq c_{11}^{(r_-)} N_-^{-2\mu_- + \alpha \mu + \alpha(\nu + \sigma + 3)} \delta. \end{aligned} \quad (25.7)$$

Как уже говорилось соответствующие члены I_g, Π_g, Π_g , возникающие при оценке разности $g(x, y) - \hat{g}(\xi, \eta)$, оцениваются аналогично. Добавим к этому, что оценки для I_g и Π_g те же самые, что и для I_f и Π_f . Для Π_g вместо (25.6) получаем

$$|\Pi_g| \leq c_4^{(r_-)} c_{10}^{(r_-)} N_-^{-r_- (\alpha - 1) - \nu + \alpha \mu} \delta. \quad (25.8)$$

Потребуем, чтобы выполнялось

$$\begin{aligned} |I_f| + |\Pi_f| + |\Pi_g| &< \frac{1}{6} \delta, \\ |I_g| + |\Pi_g| + |\Pi_g| &< \frac{1}{6} \delta. \end{aligned} \quad (25.9)$$

Последний член в (25.2) оценим, используя условие (α) из § 5 и неравенство (23.11) (считаем, что $N_0^{-\alpha^2} < 1/4$):

$$\begin{aligned} |[g]| &\leq |\varepsilon^{-1}(v_1 - \tilde{v}_1) + I_g + II_g + III_g| < \\ &< \frac{1}{4}(|\varphi| + |\psi|) + \frac{1}{6}\delta. \end{aligned} \quad (25.10)$$

Из (25.2), (25.9) и (25.10) следует, что

$$|\varphi| + |\psi| < \frac{1}{2}(|\varphi| + |\psi|) + \frac{1}{6}\delta + \frac{1}{6}\delta + \frac{1}{6}\delta,$$

т.е. выполняется нужное неравенство (22.14) при $k=n$.

Для того чтобы за счет выбора N_0 и последовательности $\{r_k\}$ можно было добиться справедливости (25.9), достаточно, как показывают формулы (25.5) – (25.8), подчинить параметры r , α , μ и σ неравенствам

$$\mu_{n-1} \leq \mu_n \leq (1 - \alpha^{-1})r_{n-1} + \alpha^{-1} - \nu_1, \quad (25.11)$$

$$\mu_{n-1} \leq \mu_n \leq \alpha^{-1} \cdot 2\mu_{n-1} - (\sigma + \nu + 3)\lambda - \nu_2. \quad (25.12)$$

Здесь мы возвратились к старым обозначениям. Числа ν_1 и ν_2 положительные и не зависят от n . При этом условие (25.9) выполнится, если потребовать

$$c_4^{(r_{n-1})} c_{10}^{(r_{n-1})} N_0^{-\alpha^n \nu_1} < 1/12, \quad (25.13)$$

$$c_{11}^{(r_{n-1})} N_0^{-\alpha^n \nu_2} < 1/12.$$

Последовательности $\{\mu_k\}$ и $\{r_k\}$ – медленно растущие, монотонные и должны стремиться к $+\infty$ при $k \rightarrow +\infty$. Таковы наши требования. Неравенство (25.11) накладывает ограничение на рост $\{\mu_k\}$, подчиняя его росту $\{r_k\}$. Разрешимость неравенств (25.11), (25.12) при $n=1$ диктует выбор чисел ν_1 и ν_2 :

$$0 < \nu_1 < (1 - \alpha^{-1})r_0 - 3\alpha\nu + \alpha^{-1}, \quad (25.14)$$

$$0 < \nu_2 < 3(2\alpha^{-1} - 1)\alpha\nu - (\nu + \sigma + 3). \quad (25.15)$$

Разрешимость неравенства (25.15) относительно ν_2 диктует выбор α : если подставить в правую часть (25.15) выражение

(22.10), получим число $(\sigma+3)\left(1 - \frac{2\sigma+5}{3(\sigma+2)}\right) > 0$. Наконец, значение (5.9) для r_0 выбрано из условия разрешимости (25.14) относительно ν_1 .

Неравенство (25.12) дает возможность на каждом шаге увеличивать μ_n на не зависящее от n положительное число $(2\kappa^{-1} - 1) \cdot 3\kappa\nu - (\nu + \sigma + 3) - \nu_2$. Возрастанию μ_n будет препятствовать неравенство (25.11). Однако, как будет показано в следующем параграфе, число r_n можно с ростом n мало-помалу увеличивать. При этом получится последовательность, стремящаяся к $+\infty$.

§ 26. Доказательство оценок (22.15). Выбор последовательности $\{r_k\}$

Введем изменение масштаба:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= N\varepsilon, \quad \bar{\eta} = M\eta, \quad \bar{x} = Nx, \\ \bar{y} &= My, \quad \bar{f} = Nf, \quad \bar{g} = N^{\nu}g, \quad \bar{\varphi} = N\varphi, \quad \bar{\psi} = N^{\nu}\psi, \\ \bar{u} &= Nu, \quad \bar{v} = Mv, \quad \bar{\hat{f}} = N\hat{f}, \quad \bar{\hat{g}} = N^{\nu}\hat{g}. \end{aligned}$$

Тогда уравнения (25.1) превратятся в следующие:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta}) &= (\sqrt{\varepsilon})^{-1} \left[\bar{u}\left(\bar{\varepsilon} + \frac{N}{M}\bar{\eta}, \bar{\eta}\right) - \bar{u}\left(\bar{\varepsilon} + \frac{N}{M}\bar{\eta} + \sqrt{\varepsilon}\bar{\varphi}, \bar{\eta} + \sqrt{\varepsilon}\bar{\psi}\right) \right] + \\ &+ \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\hat{f}}(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta}), \\ \bar{\psi}(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta}) &= (\sqrt{\varepsilon})^{-1} \left[\bar{v}\left(\bar{\varepsilon} + \frac{N}{M}\bar{\eta}, \bar{\eta}\right) - \bar{v}\left(\bar{\varepsilon} + \frac{N}{M}\bar{\eta} + \sqrt{\varepsilon}\bar{\varphi}, \bar{\eta} + \sqrt{\varepsilon}\bar{\psi}\right) \right] + \\ &+ \bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\hat{g}}(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta}) + [\bar{\hat{g}}](\bar{\eta}). \end{aligned} \tag{26.1}$$

Из оценок (23.5) и (23.6) следует, что

$$\left| D_{\bar{\varepsilon}}^{\rho_1} D_{\bar{\eta}}^{\rho_2} \bar{v} \right| \leq c_6^{(n-1)} \sqrt{\varepsilon} N^{\sigma+2} M \delta_- \leq c_6^{(r_{n-1})} N_0^{-\kappa n^{-1}(2\kappa-1)\nu} \tag{26.2}$$

$$\left| D_{\bar{\varepsilon}}^{\rho_1} D_{\bar{\eta}}^{\rho_2} \bar{u} \right| \leq c_7^{(n-1)} N^{2\sigma+4} \delta_- \leq c_7^{(r_{n-1})} N_0^{-\kappa n^{-1}(3\kappa-2)\nu},$$

$$1 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq r_{n-1} + 2.$$

Лемма 26.1. Существуют последовательность постоянных $\{c_{12}^{(r)}\}$, $r \geq r_0$, и число $\nu_3 > 0$, обладающие свойством: если

$$c_{12}^{(r_{n-1})} N_0^{-\alpha n \nu_3} < 1, \quad (26.3)$$

то при $\eta \in \text{supp } \theta_{N,M}$

$$\begin{aligned} & \left| D_{\bar{x}}^{\rho_1} D_{\bar{y}}^{\rho_2} (\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) - \hat{f}(\bar{\xi}, \bar{\eta})) \right| + \left| D_{\bar{x}}^{\rho_1} D_{\bar{y}}^{\rho_2} (\bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) - \right. \\ & \left. - \hat{g}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) + [\hat{g}](\eta)) \right| < c_{12}^{(r_{n-1})} N_0^{-\alpha n \nu_3}, \end{aligned} \quad (26.4)$$

$$1 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq r_{n-1} + 1.$$

Доказательство. Вычислим производную сложной функции:

$$\begin{aligned} D_{\bar{x}}^{\rho_1} D_{\bar{y}}^{\rho_2} f(\bar{\xi} + \bar{u}, \bar{\eta} + \bar{v}) &= \sum_{1 \leq s_1 + s_2 \leq \rho_1 + \rho_2} D_{\bar{x}}^{s_1} D_{\bar{y}}^{s_2} \hat{f}(\bar{x}, \bar{y}) \times \\ & \times \left\{ \sum_{\{\alpha_{ik}, \beta_{lm}\}} c_{\{\alpha_{ik}, \beta_{lm}\}} \prod_{i,k,l,m} \left[D_{\bar{x}}^i D_{\bar{y}}^k (\bar{\xi} + \bar{u}) \right]^{\alpha_{ik}} \times \right. \\ & \left. \times \left[D_{\bar{x}}^l D_{\bar{y}}^m (\bar{\eta} + \bar{v}) \right]^{\beta_{lm}} \right\}. \end{aligned} \quad (26.5)$$

Суммирование в (26.5) распространяется на все наборы $\{\alpha_{ik}, \beta_{lm}\}$ натуральных чисел, удовлетворяющие равенствам

$$\begin{aligned} \sum_{i,k} \alpha_{ik} &= s_1, \quad \sum_{l,m} \beta_{lm} = s_2, \\ \sum_{i,k} i \alpha_{ik} + \sum_{l,m} l \beta_{lm} &= \rho_1, \quad \sum_{i,k} k \alpha_{ik} + \sum_{l,m} m \beta_{lm} = \rho_2. \end{aligned} \quad (26.6)$$

Теперь можно оценить типичный член в сумме (26.5), воспользовавшись оценками (22.15) при $k = n-1$. Если $(i, k) \neq (1, 0)$ и $(l, m) \neq (0, 1)$, то в силу (26.2)

$$\left| D_{\bar{x}}^i D_{\bar{y}}^k (\bar{\xi} + \bar{u}) \right| = \left| D_{\bar{x}}^i D_{\bar{y}}^k \bar{u} \right| \leq c_7^{(r_-)} N_-^{-(\mu_- - \alpha(2\sigma + 4))}, \quad (26.7)$$

$$\left| D_{\bar{x}}^l D_{\bar{y}}^m (\bar{\eta} + \bar{v}) \right| = \left| D_{\bar{x}}^l D_{\bar{y}}^m \bar{v} \right| \leq c_6^{(r_-)} N_-^{-(\mu_- - \alpha(\sigma + 2 + \nu))}.$$

Особые множители в произведении (26.5) с $(i, k) = (1, 0)$ и $(l, m) = (0, 1)$ оцениваются следующим образом:

$$\begin{aligned} |D_{\bar{x}}(\bar{x} + \bar{u})| &\leq 1 + |D_{\bar{x}} \bar{u}| \leq 1 + c_7^{(r_{n-1})} N_0^{-\alpha \varepsilon^{n-1} (3\alpha \varepsilon - 2)\nu} \leq 2, \\ |D_{\bar{y}}(\bar{y} + \bar{v})| &\leq 1 + |D_{\bar{y}} \bar{v}| \leq 1 + c_8^{(r_{n-1})} N_0^{-\alpha \varepsilon^{n-1} (2\alpha \varepsilon - 1)\nu} \leq 2. \end{aligned} \quad (26.8)$$

Оценка по абсолютной величине для типичного члена в (26.5) имеет вид

$$\begin{aligned} & \left| D_{\bar{x}}^{s_1} D_{\bar{y}}^{s_2} f(\bar{x}, \bar{y}) \times \prod_{i, k, l, m} \left[D_{\bar{x}}^i D_{\bar{y}}^k (\bar{x} + \bar{u}) \right]^{\alpha_{ik}} \left[D_{\bar{x}}^l D_{\bar{y}}^m (\bar{y} + \bar{v}) \right]^{\beta_{lm}} \right| \leq \\ & \leq c_{13}^{(r)} \left(\frac{N_-}{N} \right)^{s_1 - 1} \left(\frac{M_-}{M} \right)^{s_2} \prod_{\substack{i, k, l, m \\ (i, k) \neq (1, 0) \\ (l, m) \neq (0, 1)}} N_-^{-\alpha_{ik}(\mu - \alpha \varepsilon (2\sigma + 4)) - \beta_{lm}(\mu - \alpha \varepsilon (\sigma + 2 + \nu))} = \\ & = c_{13}^{(r_{n-1})} N_0^{\alpha \varepsilon^{n-1}} \gamma_f(s_1, s_2, \alpha_{10}, \beta_{01}, \mu_{n-1}), \end{aligned} \quad (26.9)$$

где $\gamma_f(s_1, s_2, \alpha_{10}, \beta_{01}, \mu) = -\{\mu - \alpha \varepsilon (2\sigma + 3) - 1\}(s_1 - \alpha_{10}) -$
 $-\{\mu - \alpha \varepsilon (\sigma + 2) - \nu\}(s_2 - \beta_{01}) - (\alpha_{10} - 1)(\alpha \varepsilon - 1) - \beta_{01}(\alpha \varepsilon - 1)\nu. \quad (26.10)$

Оценка для $D_{\bar{x}}^{\rho_1} D_{\bar{y}}^{\rho_2} g(\bar{x} + \bar{u}, \bar{y} + \bar{v})$ производится тем же способом, и для типичного члена в сумме, аналогичной сумме (26.5), получается оценка, аналогичная (26.9), с той лишь разницей, что в правой части число $\gamma_f(s_1, s_2, \alpha_{10}, \beta_{01}, \mu)$ заменяется на

$$\gamma_g(s_1, s_2, \alpha_{10}, \beta_{01}, \mu) = \gamma_f(s_1, s_2, \alpha_{10}, \beta_{01}, \mu) + (\nu - 1)(\alpha \varepsilon - 1) > \gamma_f. \quad (26.11)$$

Соответствующие члены будут малы, если числа γ_f и γ_g отрицательны. В силу (26.6) $s_1 - \alpha_{10} \geq 0$ и $s_2 - \beta_{01} \geq 0$. Если какая-нибудь из этих разностей положительна, то в силу (26.11) и (26.10)

$$\gamma_f < \gamma_g \leq \nu(\alpha \varepsilon - 1) - \mu + 2\nu \leq -2\alpha \varepsilon \nu + \nu < 0.$$

Если одновременно $\alpha_{10} = s_1$ и $\beta_{01} = s_2$, то из (26.6) сле-

дует, что все остальные α_{ik} и β_{lm} равны нулю, $s = \rho_1$, $s_2 = \rho_2$ и оцениваемый член есть не что иное, как

$$D_{\bar{x}}^{\rho_1} D_{\bar{y}}^{\rho_2} \bar{f} \text{ (или } \bar{g}) (1 + D_{\bar{x}} \bar{u})^{\rho_1} (1 + D_{\bar{y}} \bar{v})^{\rho_2}. \quad (26.12)$$

Воспользуемся формулой бинома Ньютона и представим правую часть (26.12) в виде суммы членов типа

$$D_{\bar{x}}^{\rho_1} D_{\bar{y}}^{\rho_2} \bar{f} \text{ (или } \bar{g}) (D_{\bar{x}} \bar{u})^{k_1} (D_{\bar{y}} \bar{v})^{k_2}. \quad (26.13)$$

Если $k_1 + k_2 > 0$, то (26.13) в силу (26.2) допускает оценку сверху величиной

$$c_{14}^{(r_-)} \left(\frac{N_-}{N} \right)^{\rho_1} \left(\frac{M_-}{M} \right)^{\rho_2} N_-^{-(2\alpha-1)\nu} \leq c_{14}^{(r_{n-1})} N_0^{-\alpha n^{-1}(2\alpha-1)\nu}. \quad (26.14)$$

Остается оценить члены с $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, т.е. $D_{\bar{x}}^{\rho_1} D_{\bar{y}}^{\rho_2} \bar{f}(\bar{x}, \bar{y})$ и $D_{\bar{x}}^{\rho_1} D_{\bar{y}}^{\rho_2} \bar{g}(\bar{x}, \bar{y})$. Их удобно оценивать, вычитая из них $D_{\bar{x}}^{\rho_1} D_{\bar{y}}^{\rho_2} \hat{f}(\bar{x}, \bar{y})$ и $D_{\bar{x}}^{\rho_1} D_{\bar{y}}^{\rho_2} \hat{g}(\bar{x}, \bar{y})$. Прежде чем делать это, оценим отдельно производные функции \hat{f} и \hat{g} , используя лемму 20.6:

$$\begin{aligned} & \left| D_{\bar{x}}^{\rho_1} D_{\bar{y}}^{\rho_2} \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) \right| + \left| D_{\bar{x}}^{\rho_1} D_{\bar{y}}^{\rho_2} \bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) \right| = \\ & = N^{-\rho_1} M^{-\rho_2} \left\{ \left| D_{\bar{x}}^{\rho_1} D_{\bar{y}}^{\rho_2} \hat{f}(\bar{x}, \bar{y}) \right| N + \right. \\ & \left. + \left| D_{\bar{x}}^{\rho_1} D_{\bar{y}}^{\rho_2} \hat{g}(\bar{x}, \bar{y}) \right| N^\nu \right\} \leq c_4^{(r_-)} \{ N^2 + N^{\nu-1} \} \delta_- \leq \\ & \leq c_4^{(r_-)} N_0^{-\alpha n(2\nu-1)}, \quad 1 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq r_{n-1} + 1. \end{aligned} \quad (26.15)$$

Аналогичным образом оцениваются производные $[\hat{g}](\bar{y})$. Мы видим, что эти величины всегда малы.

Приступим к оценке разности

$$D_{\bar{x}}^{\rho_1} D_{\bar{y}}^{\rho_2} f(\bar{x}, \bar{y}) - D_{\bar{x}}^{\rho_1} D_{\bar{y}}^{\rho_2} \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Заметим, что $\gamma_f(\rho_1, \rho_2, \rho_1, \rho_2) = -((\rho_1 - 1) + \rho_2 \nu)(\alpha - 1)$. Эта величина не является отрицательной только при $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$.

Поэтому достаточно оценить разность $D_{\bar{x}} \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) - D_{\bar{\xi}} \hat{f}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, а остальные случаи покрываются уже полученными оценками. Представим эту разность в виде

$$\begin{aligned} D_{\bar{x}} \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) - D_{\bar{\xi}} \hat{f}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) &= D_x f(x, y) - D_{\xi} \hat{f}(\xi, \eta) = \\ &= D_x f(x, y) - D_{\xi} f(\xi, \eta) + (1 - \theta_{NM_-}(\eta)) D_{\xi} f(\xi, \eta) + \\ &\quad + D_{\xi} (\text{Id} - T_{NM}^{(r_-)}) \theta_{NM_-}(\eta) f(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (23.16)$$

Используя оценки (25.3), имеем

$$\begin{aligned} |D_x f(x, y) - D_{\xi} f(\xi, \eta)| &\leq \max |D_{\xi}^2 f(\xi, \eta)| \cdot |x - \xi| + \\ &\quad + \max |D_{\xi} D_{\eta} f(\xi, \eta)| \cdot |y - \eta| \leq N_- N^{-\alpha(\sigma+3)} + \\ &\quad + M_- \sqrt{\epsilon} N^{-\alpha(\sigma+3)} \leq 2N_0^{-\alpha n}. \end{aligned} \quad (26.17)$$

Из леммы 19.1 получаем, что при $\eta \in \text{supp } \theta_{N, M}$

$$(1 - \theta_{NM_-}(\eta)) D_{\xi} f(\xi, \eta) = 0. \quad (26.18)$$

Из п.б) леммы 20.6 при $r' = r_- - 1$ и оценки (22.15) при $k = n - 1$ получаем оценку

$$\begin{aligned} &|D_{\xi} (\text{Id} - T_{NM}^{(r_-)}) \theta_{NM_-}(\eta) f(\xi, \eta)| = \\ &= |(\text{Id} - T_{NM}^{(r_-)}) \theta_{NM_-}(\eta) D_{\xi} f(\xi, \eta)| \leq \\ &\leq c_{15}^{(r_-)} \max_{\rho_1 + \rho_2 = r_- - 1} N^{-\rho_1} M^{-\rho_2} N^{\rho_1} M^{\rho_2} \leq c_{15}^{(r_- - 1)} N_0^{-\alpha n (1 - \alpha^{-1})(r_- - 1)}. \end{aligned} \quad (26.19)$$

Итак, правая часть (26.16) мала. Займемся аналогичными оценками для функции $\bar{g}(\bar{x}, \bar{y})$. Так как $\gamma_g(\rho_1, \rho_2, \rho_1, \rho_2) = -(\rho_1 + (\rho_1 - 1)\nu)(\alpha - 1)$ есть отрицательная величина, за исключением случаев а) $0 < \rho_1 \leq \nu$, $\rho_2 = 0$ и б) $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$, то достаточно ограничиться рассмотрением этих случаев. Так же, как и раньше, представим разность $D_x^{\rho_1} \bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) - D_{\xi}^{\rho_1} \hat{g}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ в виде

$$\begin{aligned} N^{\nu - \rho_1} (D_x^{\rho_1} g(x, y) - D_{\xi}^{\rho_1} \hat{g}(\xi, \eta)) &= N^{\nu - \rho_1} (D_x^{\rho_1} g(x, y) - \\ &- D_{\xi}^{\rho_1} g(\xi, \eta)) + N^{\nu - \rho_1} (1 - \theta_{NM_-}(\eta)) D_{\xi}^{\rho_1} g(\xi, \eta) + \\ &\quad + N^{\nu - \rho_1} D_{\xi}^{\rho_1} (\text{Id} - T_{NM}^{(r_-)}) \theta_{NM_-}(\eta) g(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (26.20)$$

Первый член в правой части (24.20) оценивается так же, как (24.17). Второй член равен нулю при $\eta \in \text{supp } \theta_{N,M}$.

Оценим последний член в (26.20):

$$\begin{aligned} & \left| N^{\nu-\rho_1} D_{\xi}^{\rho_1} (\text{Id} - T_{NM}^{(r_-)}) \theta_{NM}(\eta) g(\xi, \eta) \right| \leq \\ & \leq c_{16}^{(r_-)} \max_{s_1+s_2=r_--\rho_1} \left(\frac{N_-}{N} \right)^{-\nu+s_1+\rho_1} \left(\frac{M_-}{M} \right)^{s_2} \leq c_{16}^{(r_{n-1})} N_0^{-\alpha n(1-\alpha^{-1})(r_0-\nu)}. \end{aligned} \quad (26.21)$$

Рассмотрим случай б):

$$\begin{aligned} D_{\bar{y}} \bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) - D_{\bar{\eta}} \hat{g}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) &= \sqrt{\epsilon} (D_y g(x, y) - D_{\eta} \hat{g}(\xi, \eta)) = \\ &= \sqrt{\epsilon} (D_y g(x, y) - D_{\eta} g(\xi, \eta)) + \sqrt{\epsilon} D_{\eta} (1 - \theta_{NM}) g(\xi, \eta) + \\ &+ \sqrt{\epsilon} D_{\eta} (\text{Id} - T_{NM}^{(r_-)}) \theta_{NM} g. \end{aligned} \quad (26.22)$$

В следующих ниже оценках используются неравенства (22.15) при $k = n - 1$. Используя (25.3), получаем

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\epsilon} (D_y g(x, y) - D_{\eta} g(\xi, \eta)) \right| &\leq \sqrt{\epsilon} \max |D_x D_y g| \cdot |x - \xi| + \\ &+ \sqrt{\epsilon} \max |D_y^2 g| \cdot |y - \eta| \leq N^{\nu} N^{-\alpha(\delta+3)} \leq N_0^{-\alpha n+1}. \end{aligned} \quad (26.23)$$

Второй член в правой части (26.22) равен нулю при $\eta \in \text{supp } \theta_{N,M}$. Последний член в (26.22) оценивается следующим образом (используется лемма 20.6):

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\epsilon} D_{\eta} (\text{Id} - T_{NM}^{(r_-)}) \theta_{NM} g \right| &= \left| (\text{Id} - T_{NM}^{(r_-)}) \sqrt{\epsilon} \times \right. \\ &\times D_{\eta} (\theta_{NM} g) \left. \right| \leq c_4^{(r_-)} \max_{\rho_1+\rho_2=r_- - 1} \left| N^{-\rho_1} M^{-\rho_2} \sqrt{\epsilon} \times \right. \\ &\times D_{\xi}^{\rho_1} D_{\eta}^{\rho_2+1} (\theta_{NM} g) \left. \right| \leq c_{17}^{(r_-)} \max_{\rho_1+\rho_2=r_- - 1} \left(\frac{N_-}{N} \right)^{\rho_1} \left(\frac{M_-}{M} \right)^{\rho_2} = c_{17}^{(r_{n-1})} N_0^{-\alpha n(1-\alpha^{-1})}. \end{aligned} \quad (26.24)$$

Следующая лемма, имеющая локальный характер, очевидна.

Лемма 26.2. Для каждого целого положительного r существует положительное число $\alpha(r)$, обладающее свойством: если $\varphi(\xi, \eta)$ и $\psi(\xi, \eta)$ — гладкие функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\varphi(\xi, \eta) = \Phi(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta), \xi, \eta),$$

$$\psi(\xi, \eta) = \Psi(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta), \xi, \eta),$$

где $\Phi(\varphi, \psi, \xi, \eta)$ и $\Psi(\varphi, \psi, \xi, \eta)$ — гладкие функции, все производные которых по всем аргументам до порядка r включительно не превосходят по абсолютной величине $\alpha(r)$, то производные φ и ψ до порядка r включительно не превосходят по абсолютной величине $1/2$.

Потребуем, чтобы выполнялись неравенства

$$c_6^{(r_{n-1})} N_0^{-\alpha^{n-1}(2\alpha-1)} + c_7^{(r_{n-1})} N_0^{-\alpha^{n-1}(2\alpha-1)} + c_{12}^{(r_{n-1})} N_0^{-\alpha^n} < \alpha(r_{n-1}+1), \quad N_0^{\alpha^n} > c_2^{(r_{n-1})}. \quad (26.25)$$

Неравенства (26.2) и утверждение леммы 26.1 дают нам возможность применить лемму 26.2 к уравнениям (26.1), откуда получаем справедливость оценок (22.15) при $k=n$, если в качестве r_n возьмем число r_{n-1} или $r_{n-1}+1$.

В качестве r_n на самом деле возьмем одно из этих двух чисел. Необходимо, чтобы при всех n выполнялись неравенства (23.7) (при $k=n-1$), (25.13), (26.3) и (26.25). При $n=1$ эти неравенства можно удовлетворить за счет выбора числа N_0 : $N_0 > c_4 > 1$. При дальнейших значениях n они будут выполняться, если оставить число r_n постоянным. Будем увеличивать число r_n на единицу при тех значениях n , для которых число $N_0^{-\alpha^n}$ настолько мало, что рассматриваемая совокупность неравенств выполняется и для увеличенного на единицу значения r_n . Так мало-помалу число r_n будет увеличиваться. Возникнет последовательность, стремящаяся к бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ КУИКИ - СМЕЙЛА ДЛЯ
ВЫЖУКЛОГО БИЛЛИАРДА

В этой главе излагается доказательство теоремы 3, сформулированной в § 4. Возникающие здесь трудности связаны с тем, что шевеление границы области Ω в малой окрестности одной точки может оказать влияние на поведение преобразования T сразу в окрестности нескольких точек рассматриваемой периодической траектории в фазовом пространстве Σ .

§ 27. План доказательства теоремы

Пусть $\Omega \in \mathfrak{Q}$. Символами $T_\Omega: \Sigma_\Omega \rightarrow \Sigma_\Omega$, или просто $T: \Sigma \rightarrow \Sigma$, будем обозначать преобразование, определенное для области Ω в § 1.

Рассмотрим периодические траектории преобразования T с периодом $n > 1$. Неподвижные точки T нас интересовать не будут, поэтому далее термины "периодическая траектория" и "периодическая точка" относятся только к периодическим траекториям и точкам с периодом больше единицы. Все эти точки содержатся в множестве $\Sigma \setminus \partial \Sigma$. По отношению к инволюции $\hat{\sigma}$, определенной в § 1, множество периодических траекторий разбивается на два класса: симметричные траектории и несимметричные. Периодическую траекторию будем называть симметричной, если она инвариантна относительно преобразования $\hat{\sigma}$, и несимметричной в противном случае.

Пусть $\Gamma_0 \subset \Sigma$ - множество неподвижных точек $\hat{\sigma}$. Множество Γ_0 состоит из всех пар $(x, e) \in \Sigma$, для которых вектор e ортогонален к $\partial \Omega$ в точке x .

Лемма 27.1. Для того чтобы периодическая траектория была симметричной, необходимо и достаточно, чтобы она содержала точку из Γ_0 . В этом случае период траектории четный, и последняя содержит ровно две таких точки.

Доказательство. Пусть $\{z_i, 0 \leq i < n\}$ — периодическая траектория с периодом n , $Tz_i = z_{i+1 \pmod n}$, и пусть $\hat{\sigma}z_0 = z_\alpha, 0 \leq \alpha < n$.

Предположим, что рассматриваемая траектория симметрична. Если $\alpha = 0$, то $z_0 \in \Gamma_0$. Если $\alpha > 0$, то в силу (1.8) $\hat{\sigma}z_j = \hat{\sigma}T^jz_0 = T^{-j}\hat{\sigma}z_0 = T^{-j}z_\alpha = z_{\alpha-j}, 0 < j \leq \alpha$. Если α четное, то $\hat{\sigma}z_{\alpha/2} = z_{\alpha/2}$; если α нечетное, то $\hat{\sigma}z_{(\alpha-1)/2} = z_{(\alpha+1)/2}$. Покажем, что последний случай исключен. Пусть $z_{(\alpha-1)/2} = (x_1, e_1), z_{(\alpha+1)/2} = (x_2, e_2)$. Преобразование $\hat{\sigma}$ не меняет первой компоненты, поэтому $x_1 = x_2$. Но тогда равенство $z_{(\alpha+1)/2} = Tz_{(\alpha-1)/2}$ невозможно, так как во внутренних точках Σ преобразование T обязательно изменяет первую компоненту. Напомним, что период траектории больше 1, поэтому она лежит в множестве $\Sigma \setminus \partial\Sigma$.

Предположим, что на траектории имеется точка, принадлежащая Γ_0 . Покажем, что траектория симметрична. Без ограничения общности можно считать, что этой точкой является z_0 , т.е. $\hat{\sigma}z_0 = z_0$. Тогда в силу (1.8) $\hat{\sigma}z_j = z_{n-j}, 1 \leq j < n$, т.е. траектория симметрична. Применяя приведенное выше рассуждение с n вместо α , получаем, что n четно и $\hat{\sigma}z_{n/2} = z_{n/2}$. Все точки z_j с $j \neq 0$ и $j \neq n/2$ не принадлежат Γ_0 , что опять следует из равенства $\hat{\sigma}z_j = z_{n-j}$. ■

Две точки симметричной траектории, принадлежащие Γ_0 , назовем концевыми точками этой траектории. На рис. 18 изображены проекции на Ω из \mathcal{L} несимметричной и симметричной периодических траекторий с периодом $n = 4$.

Область Ω назовем n -квазиобщей, если выполнены следующие условия:

$\Omega n 1)$ любая периодическая траектория преобразования T_Ω с периодом $n_0 < n$ не вырождена, т.е. либо гиперболическая, либо эллиптическая;

$\Omega n 2)$ любая симметричная периодическая траектория преоб-

разования T_{Ω}^n с периодом $n_0 < 2n$ не вырождена;

Ωn3) если z_0 — эллиптическая периодическая точка с периодом $n_0 < n$, то собственные числа матрицы $dT_{\Omega}^{n_0}(z_0)$ имеют вид $\lambda_{1,2} = \exp\{\pm i 2\pi\alpha\}$, где α либо иррационально,

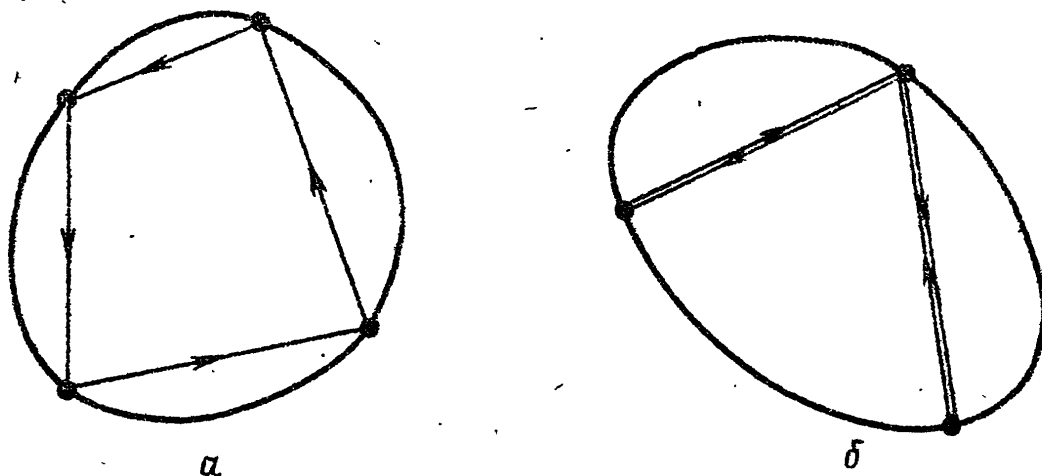


Рис. 18. Проекция несимметричной (а) и симметричной (б) периодических траекторий с периодом $n=4$.

либо $\alpha = p/q$, где p/q — несократимая дробь и $q > 2n$, параметр ν для z_0 отличен от 0 (см. § 4);

Ωn4) если z_0 и z_1 — гиперболические периодические точки с периодами меньше n , то все пересечения отрезков кривых $W_n^{(s)}(z_0)$ и $W_n^{(u)}(z_1)$ трансверсальны. Здесь символами $W_n^{(s)}(z_0)$ и $W_n^{(u)}(z_1)$ обозначены замкнутые отрезки устойчивого $W^{(s)}(z_0)$ и неустойчивого $W^{(u)}(z_1)$ многообразий точек z_0 и z_1 соответственно (см. § 4) длиной n с центром в z_0 и z_1 (в Σ_{Ω} мы фиксируем евклидову метрику, порожденную координатной системой (s, δ) (см. § 1)).

Для доказательства теоремы 3 построим убывающую последовательность множеств Ω_n , $n \geq 1$, содержащихся в Ω . Множества Ω_n будут обладать свойствами:

- 1) Ω_n открыто и всюду плотно в Ω ,
- 2) все области из Ω являются n -квазиобластями.

Пусть $\hat{\Omega}_n$ — совокупность всех n -квазиобластей.

Ясно, что $\hat{\Omega}_n \supset \Omega_n$ и $\hat{\Omega}_n$ открыто в Ω . Из свойства I) следует, что $\hat{\Omega}_n$ всюду плотно в Ω . Множество общих областей (см. § 4) есть пересечение $\bigcap_{n \geq 1} \hat{\Omega}_n$. Из теоремы Бэра о категориях следует утверждение теоремы 3. Осталось построить множества Ω_n .

Пусть $\Omega_1 = \Omega$. Предположим, что построены множества Ω_r , $1 \leq r \leq n$. В дальнейшем нам понадобятся дополнительные соглашения.

Удобно включить все фазовые пространства Σ_Ω преобразований $T_\Omega: \Sigma_\Omega \rightarrow \Sigma_\Omega$ в одно большое фазовое пространство Π . В качестве Π возьмем многообразие всех ориентированных прямых в \mathbb{R}^2 . В пространстве Π будем рассматривать координатные системы (H, φ) , введенные в § 1. Точку $(x, e) \in \Sigma_\Omega$, где $x \in \partial\Omega$, e — единичный вектор, не направленный во внешность Ω , отождествим с ориентированной прямой, проходящей через точку x в направлении e . С помощью этого отождествления Σ_Ω вкладывается в Π . Многообразие Π диффеоморфно цилиндру $\mathbb{R} \times S^1$, множество Σ_Ω есть двумерное подмногообразие с краем в Π , оно зависит от Ω . Заметим, что гладкая структура в Σ_Ω , индуцированная из Π , не совпадает с гладкой структурой, определенной в § 1, но для наших целей это несущественно.

Множество Ω_{n+1} будем строить следующим образом. Пусть $\Omega \in \Omega$. Образует множество $\Gamma_\Omega \subset \Sigma_\Omega$, являющееся объединением множества всех периодических точек с периодом меньше n , множества $\Gamma' = \bigcup_{k=1}^{n-1} T_\Omega^{-k} \Gamma_0$ и $\partial\Sigma_\Omega$. Так как указанных периодических точек в силу свойства $\Omega n 1)$ конечное число, множество Γ_Ω компактно.

Лемма 27.2. Существует окрестность множества Γ_Ω в Σ_Ω замыкание которой не содержит периодических точек с периодом n , принадлежащих несимметричным траекториям, и концевых точек симметричных периодических траекторий с периодом $2n$.

Доказательство. Очевидно, что каждая гиперболическая периодическая точка с периодом меньше n такой окрестностью обладает. Так как вблизи эллиптической точки с периодом $n_0 < n$, удовлетворяющей условию $\Omega n 3)$, преобразование

$T_{\Omega}^{n_0}$ мало отличается (в специальных координатах, см. § 4) от поворота на угол $2\pi\alpha$, где α иррационально или $\alpha = p/q$, где p/q - несократимая дробь, $q > 2n$, то в достаточно малой окрестности такой точки не будет периодических точек с периодом n и $2n$. Предположим, что в любой окрестности множества Γ' имеются периодические точки с периодом n . Тогда, выбирая последовательность таких точек, сходящуюся к Γ' , убеждаемся в наличии в Γ' неизолированной периодической точки с периодом n , которая принадлежит симметричной траектории, так как последняя содержит точку из Γ_0 . Но по условию $\Omega n 2)$ такая периодическая траектория не вырождена, и поэтому не может быть неизолированной.

Пусть в любой окрестности Γ' имеется концевая точка некоторой симметричной периодической траектории с периодом $2n$. Тогда такая же точка z_0 имеется на Γ' . По определению множества Γ' для некоторого k , $1 \leq k < n$, $T^k z_0 \in \Gamma_0$, что противоречит свойству симметричной траектории, сформулированному в лемме 27.1. То что в некоторой окрестности $\partial \Sigma_{\Omega}$ нет периодических точек с периодом, не превосходящим $2n$, следует из леммы 3.2. Объединение полученных множеств есть требуемая окрестность. ■

Обозначим дополнение в Σ_{Ω} к построенной в лемме 27.2 окрестности множества Γ буквой K . Множество K компактно и по своему определению обладает свойствами:

$K \Omega 1)$ содержит в своей внутренности все периодические точки преобразования T_{Ω} с периодом n ;

$K \Omega 2)$ содержит в своей внутренности все концевые точки симметричных периодических траекторий T_{Ω} с периодом $2n$ и не содержит остальных точек этих траекторий;

$K \Omega 3)$ не содержит ни одной периодической точки T_{Ω} с периодом меньше n ;

$K \Omega 4)$ не пересекается с $\partial \Sigma_{\Omega}$.

Назовем n -траекторией для T всякую последовательность точек $\{z_i, 0 \leq i < n\}$ из $\Sigma \setminus \partial \Sigma$, для которой $z_{i+1} = Tz_i$, $0 \leq i < n-1$. Здесь n - целое положительное число. Будем называть n -траекторию простой, если для любых индексов

$0 \leq i < j < n$ выполнено следующее: $z_i \neq z_j$ и $z_i \neq \hat{\sigma} z_j$.
 (Инволютивное преобразование $\hat{\sigma}: \Sigma \rightarrow \Sigma$ определено в § I.)
 Сопоставим каждой n -траектории ломаную, соединяющую точки $z_i \in \partial\Omega$, $0 \leq i < n$, $z_i = (x_i, e_i)$. Эта ломаная изображает отрезок траектории бильярдного шара в Ω . Условие простоты n -траектории означает, что указанная ломаная не имеет ни одного звена, проходимого более одного раза (безразлично в каком направлении). Точку z_0 назовем начальной точкой n -траектории $\{z_i, 0 \leq i < n\}$.

Построенное выше компактное множество K обладает еще одним свойством:

K Ω 5) все n -траектории преобразования T_Ω , начальные точки которых принадлежат K , являются простыми.

Действительно, так как K не содержит периодических точек с периодом меньше n , то для любой n -траектории $\{z_i, 0 \leq i < n\}$, для которой $z_0 \in K$, $z_i \neq z_j$, если $0 \leq i < j < n$. Равенство $z_i = \hat{\sigma} z_j$ означает, что $z_{i+\alpha} = \hat{\sigma} z_{j-\alpha}$ для всех α из интервала $[0, \min\{j, n-i-1\}]$. Если $j+i$ нечетное, то $z_\beta = \hat{\sigma} z_{\beta+1}$, где $\beta = (i+j-1)/2$, что противоречит свойству преобразования T изменять первые компоненты точек $z \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$. Следовательно, $j+i$ четное и $z_\beta = \hat{\sigma} z_\beta \in \Gamma_0$ для $\beta = (i+j)/2$, т.е. $z_0 \in T^{-\beta} \Gamma_0$, что противоречит определению множества K (его дополнение содержит $\Gamma^i = \bigcup_{k=1}^{n-1} T^{-k} \Gamma_0$).

При малых шевелениях Ω свойства **K Ω 1)–K Ω 5)** множества K очевидно не нарушаются. Обозначим символом $\Omega_n(K)$ открытое множество в Ω_n , для всех точек Ω которого множество $K \subset \Pi$ обладает свойствами **K Ω 1)–K Ω 5)**.

Пусть $\alpha_\Omega: \Sigma_\Omega \rightarrow \partial\Omega$ – проекция, сопоставляющая точке $(x, e) \in \Sigma_\Omega$ первый член пары: точку $x \in \partial\Omega$. Кратностью n -траектории $\{z_i, 0 \leq i < n\}$ назовем число $k = n - m$, где m – число различных значений, принимаемых последовательностью $\alpha_\Omega(z_i)$, $0 \leq i < n$. Будем называть n -траекторию 3-невыврожденной, если ее кратность меньше трех, и 3-выврожденной в противном случае.

Введем следующие обозначения, в которых K – компактное множество:

$\Omega_n^{(3)}(K)$ - часть множества $\Omega_n(K)$, состоящая из всех Ω , обладающих свойством: любая n -траектория преобразования T_Ω с начальной точкой из K 3-невырождена;

$\tilde{\Omega}_n^{(3)}(K)$ - часть множества $\Omega_n^{(3)}(K)$, состоящая из всех Ω , удовлетворяющих условиям $\Omega(n+1)1$, $\Omega(n+1)2$, $\Omega(n+1)3$;

$\tilde{\tilde{\Omega}}_n^{(3)}(K)$ - часть множества $\tilde{\Omega}_n^{(3)}(K)$, состоящая из всех Ω , удовлетворяющих условию $\Omega(n+1)4$.

Лемма 27.3. Множество $\Omega_n^{(3)}(K)$ открыто и плотно в $\Omega_n(K)$.

Лемма 27.4. Множество $\tilde{\Omega}_n^{(3)}(K)$ открыто и плотно в $\Omega_n^{(3)}(K)$.

Лемма 27.5. Множество $\tilde{\tilde{\Omega}}_n^{(3)}(K)$ открыто и плотно в $\tilde{\Omega}_n^{(3)}(K)$.

Эти леммы будут доказаны в следующих параграфах.

Возьмем в качестве Ω_{n+1} объединение всевозможных множеств $\tilde{\tilde{\Omega}}_n^{(3)}(K)$. Очевидно, что Ω_{n+1} открыто и плотно в Ω_n . Все области Ω из Ω_{n+1} являются $(n+1)$ -квазиобшими.

§ 28. Доказательство леммы 27.3.

Приведение n -траекторий

в общее положение

Пусть $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ - алфавит, состоящий из достаточно большого числа букв. Сопоставим n -траектории $\{z_i, 0 \leq i < n\}$ слово, состоящее из n букв, взятых из A , по следующему правилу: если $z_\Omega(z_i) = z_\Omega(z_j)$, то на i -м и j -м местах стоят одинаковые буквы, в противном случае разные. Отсюда следует, что слова, различающиеся перестановкой букв в алфавите. При этом соглашении слово определяется по n -траектории однозначно. Будем говорить, что это слово изображает данную n -траекторию. Кратность n -траектории полностью определяется по изображающему ее слову. Поэтому будем говорить о кратности слова, понимая под этим разность между длиной слова и числом разных букв в нем.

Сформулируем ограничения, которым должны удовлетворять слова, изображающие простые n -траектории:

- 1) не должны стоять рядом две одинаковые буквы,
- 2) никакая пара рядом стоящих букв не должна встречаться в слове более одного раза (две пары считаются совпадающими, если они равны как неупорядоченные пары, т.е. порядок следования букв в паре не играет роли).

Используя эти ограничения, нетрудно доказать следующую лемму, перечисляющую все слова, изображающие простые n -траектории с малым m .

Лемма 28.1. С точностью до перестановок букв в алфавите все слова, изображающие простые n -траектории с $m = 1, 2, 3, 4$, приведены в табл. I.

Т а б л и ц а I

m	Слово	k
1	α	0
2	$\alpha\beta$	0
3	$\alpha\beta\gamma$	0
	$\alpha\beta\gamma\alpha$	1
4	$\alpha\beta\gamma\delta$	0
	$\alpha\beta\gamma\alpha\delta, \alpha\beta\gamma\delta\alpha, \alpha\beta\gamma\delta\beta$	1
	$\alpha\beta\gamma\alpha\delta\beta, \alpha\beta\gamma\alpha\delta\gamma, \alpha\beta\gamma\delta\alpha\gamma$	2

С л е д е т в и е. Для 3-вырожденной простой n -траектории $n \geq 8$.

Действительно, для такой n -траектории $m \geq 5$, следовательно, $n = k + m \geq k + 5 \geq 8$.

Будем записывать слова в виде "произведения" $\prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i$, $\alpha_i \in A$. Фрагментом слова $\prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i$ назовем слово $\prod_{i=i_0}^{i_1} \alpha_i$, где $0 \leq i_0 \leq i_1 < n$. Редуцированным фрагментом (р.ф.) назовем слово, получающееся из некоторого фрагмента данного слова путем вычеркивания некоторых букв из числа входящих во фрагмент только один раз. Фрагмент, из которого ничего не вычеркнуто, также будем называть р.ф.

Лемма 26.2. Всякое слово, изображающее простую 3-вырожденную n -траекторию, обязательно содержит хотя бы один р.ф. из табл.2.

Доказательство. Максимально редуцированным фрагментом (м.р.ф.) назовем редуцированный фрагмент, в котором нет ни одной буквы, входящей только один раз. Очевидно, что всякое слово, изображающее 3-вырожденную n -траекторию, содержит м.р.ф. кратности 3. Все м.р.ф. кратности 3 выписаны в конце доказательства леммы. Их 26 штук. Покажем, как из этого списка получить табл.2. Фрагмент, входящий в слово, изображающее простую n -траекторию, должен подчиняться условиям 1) и 2), сформулированным в начале параграфа. Поэтому слово, изображающее простую 3-невырожденную n -траекторию, вместе с некоторым м.р.ф. из нижеприведенного списка должно содержать более полный р.ф., из которого данный м.р.ф. получается вычеркиванием всех символов, встречающихся только один раз. Способов восстановления вычеркнутых символов несколько. Из всевозможных таких восстановлений мы выбрали минимальный набор, обладающий свойством: если слово, изображающее простую n -траекторию, содержит данный м.р.ф., то оно содержит один из р.ф. данного минимального набора. Так получается табл.2. Для символов, входящих более одного раза, мы использовали буквы α , β , γ , для символов, входящих только один раз, — буквы δ , ϵ , μ . Приведем список м.р.ф. кратности 3 (цифры в скобках указывают число слов в минимальном наборе, входящем в табл.2):

$m=1$ $\alpha\alpha\alpha\alpha(1)$,

$m=2$ $\alpha\alpha\alpha\beta(1)$, $\alpha\alpha\beta\alpha(3)$,
 $\alpha\alpha\beta\beta(1)$, $\alpha\beta\alpha\alpha(3)$,
 $\alpha\beta\alpha\beta(4)$, $\alpha\beta\beta\alpha(2)$,
 $\alpha\alpha\beta\beta\beta(1)$, $\alpha\beta\alpha\beta\beta(3)$,
 $\alpha\beta\beta\alpha\beta(3)$, $\alpha\beta\beta\beta\alpha(2)$,

$m=3$ $\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma(1)$, $\alpha\alpha\beta\gamma\beta\gamma(3)$, $\alpha\alpha\beta\gamma\gamma\beta(2)$,
 $\alpha\beta\alpha\beta\gamma\gamma(3)$, $\alpha\beta\alpha\gamma\beta\gamma(4)$, $\alpha\beta\alpha\gamma\gamma\beta(2)$,
 $\alpha\beta\beta\alpha\gamma\gamma(2)$, $\alpha\beta\beta\gamma\alpha\gamma(2)$, $\alpha\beta\beta\gamma\gamma\alpha(1)$,

Т а б л и ц а 2

№ п/п	р.ф.	Точки де- формации	№ п/п	р.ф.	Точки де- формации
1	αδαιμα	δ, ε, μ	34	αδρεαρυμυ	δ, ε, μ
2	αδαιερμρ	δ, ε, μ	35	αδραυερυ	δ, ε
3	αδαιερμαρ	δ, ε, μ	36	αδραυρευ	δ, γ, ε
4	αδαιεαμρ	δ, ε, μ	37	αρδαιυερυ	δ, γ, ε
5	αδαιεραμρ	δ, ε, μ	38	αρδαιυρευ	δ, γ, ε
6	αδαιερμρα	δ, ε, μ	39	αδραυεγρ	δ, ρ, ε
7	αδαιερμα	δ, ε, μ	40	αρδαιεγρ	ρ, δ, ε
8	αδρεαμαρ	δ, ε, μ	41	αδρεραυμυ	δ, ε, μ
9	αδραεαμρ	δ, ε, μ	42	αρδρεαυμυ	δ, ε, μ
10	αρδαιεαμρ	δ, ε, μ	43	αρδρυαεγ	δ, γ, ε
11	αδραερμα	δ, ε, μ	44	αρδρυεαγ	δ, γ, ε
12	αδρεαμρα	δ, ε, μ	45	αρδρυεγα	δ, γ, ε
13	αρδαιερμα	δ, ε, μ	46	αδρεγαρυ	δ, ε, γ
14	αδρεαρμα	δ, ε, μ	47	αδρυαρεγ	δ, γ, ε
15	αδρεραμα	δ, ε, μ	48	αρδυαερυ	δ, γ, ε
16	αρδρεαμα	δ, ε, μ	49	αργαδρεγ	γ, δ, ε
17	αδαιερμρ	δ, ε, μ	50	αρδυεαγρ	ρ, δ, ε
18	αδραερμρ	δ, ε, μ	51	αρδυαεγρ	ρ, δ, ε
19	αρδαιερμρ	δ, ε, μ	52	αργδαυερ	ρ, δ, ε
20	αδρεαρμε	δ, ε, μ	53	αργαδυερ	ρ, δ, ε
21	αδρερμαρ	δ, ε, μ	54	αδρεγραγ	δ, ε, γ
22	αρδρεαμρ	δ, ε, μ	55	αδρυεραγ	δ, γ, ε
23	αδρεραμρ	δ, ε, μ	56	αρδυρεαγ	δ, γ, ε
24	αδρερμρα	δ, ε, μ	57	αργδρεαγ	γ, δ, ε
25	αρδρερμα	δ, ε, μ	58	αρδυρεγα	δ, γ, ε
26	αδαιερυμυ	δ, ε, μ	59	αργδρεγα	ρ, δ, ε
27	αδαιεγρμυ	δ, ε, μ	60	αρδυεργα	ρ, δ, ε
28	αδαιεγρμυ	δ, ε, μ	61	αργδυαερ	ρ, δ, ε
29	αδαιεγμρυ	δ, ε, μ	62	αδρυεγαρ	δ, ρ, ε
30	αδαιεγμγρ	δ, ε, μ	63	αρδυεγμα	δ, ε, μ
31	αδαιεγμρ	δ, ε, μ	64	αργδυερμα	δ, ε, μ
32	αδραερυμυ	δ, ε, μ	65	αδρεγμγρα	δ, ε, μ
33	αρδαιερυμυ	δ, ε, μ	66	αδρυεγμρα	δ, ε, μ

$\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma(4)$, $\alpha\beta\gamma\alpha\gamma\beta(4)$, $\alpha\beta\gamma\beta\alpha\gamma(4)$,
 $\alpha\beta\gamma\beta\gamma\alpha(3)$, $\alpha\beta\gamma\gamma\alpha\beta(2)$, $\alpha\beta\gamma\gamma\beta\alpha(4)$. ■

Назовем вхождением следующую пару: р.ф. из табл.2 и под-
 множество множества $\{1, 2, \dots, n\}$, с числом элементов,
 равным длине р.ф. Будем говорить, что слово длиной n содержит
 данное вхождение, если после вычеркивания из слова всех симво-
 лов, стоящих на местах, номера которых не входят в подмножест-
 во вхождения, у нас получится р.ф. вхождения. Пусть α - вхож-
 дение. Обозначим символом $\Omega_n^\alpha(K)$ совокупность всех облас-
 тей из $\Omega_n(K)$, обладающих свойством: слово всякой n -траек-
 тории преобразования T_Ω , начинающейся в K , не содержит
 вхождения α .

Лемма 28.3. Множество $\Omega_n^\alpha(K)$ открыто и плотно в $\Omega_n(K)$.

В силу утверждения леммы 28.2 $\Omega_n^{(3)}(K) = \bigcap_{\alpha} \Omega_n^\alpha(K)$.

Поэтому утверждение леммы 27.3 следует из леммы 28.3.

Сформулируем локальный вариант леммы 28.3.

Лемма 28.4. Для любой пары $(\Omega_0, z_0) \in \Omega_n(K) \times K$
 существуют открытая окрестность U точки Ω_0 в $\Omega_n(K)$ и ком-
 пактная окрестность \bar{V} точки z_0 в Π , такие, что множество
 U' всех областей из U , обладающих свойством "слово всякой
 n -траектории, начальная точка которой принадлежит $K \cap \bar{V}$, не
 содержит α ", открыто и плотно в U .

Докажем, что утверждение леммы 28.3 следует из леммы 28.4.
 Множество K можно покрыть конечным числом таких окрестностей
 \bar{V}_i , о которых говорится в лемме 28.4. Рассмотрим пересечение
 $\tilde{U} = \bigcap_i U_i$ соответствующих окрестностей области Ω_0 в $\Omega_n(K)$.
 Множество \tilde{U}' всех областей из \tilde{U} , обладающих свойством "сло-
 во всякой n -траектории, начальная точка которой принадлежит
 K , не содержит α ", является открытым и плотным в \tilde{U} как
 пересечение конечного числа открытых и плотных в \tilde{U} множеств.
 Так как объединение всех \tilde{U} для всевозможных Ω_0 есть $\Omega_n(K)$,
 то объединение соответствующих \tilde{U}' есть множество $\Omega_n^\alpha(K)$.

которое соответственно открытое и плотное в $\Omega_n(K)$. Осталось доказать лемму 28.4.

Пусть $\Omega_0 \in \Omega_n(K)$, $z_0 \in K$. Рассмотрим n -траекторию $\{T_{\Omega_0}^i z_0, 0 \leq i < n\}$. В силу свойства $K\Omega_0 5)$ она простая. Если слово, изображающее ее, не содержит α , то таковыми будут слова для всех n -траекторий $\{T_{\Omega}^i z, 0 \leq i < n\}$, если область Ω достаточно близка к области Ω_0 , точка z достаточно близка к точке z_0 , что следует из непрерывности $T_{\Omega}^i z$ и $x_{\Omega}(z)$ как функций пары (Ω, z) . В этом случае достаточно малые окрестности U и \bar{V} точек Ω_0 и z_0 обладают требуемыми в лемме свойствами, причем $U' = U$.

Пусть n -траектория $\{T_{\Omega_0}^i z_0, 0 \leq i < n\}$ такова, что слово, ее изображающее, содержит α . Для дальнейших построений потребуется изучить влияние малых деформаций области на поведение n -траектории. Опишем деформацию области Ω , которую будем называть элементарной деформацией в точке $x^* \in \partial\Omega$. Для этого введем в окрестности x^* декартову систему координат (x, y) , поместив начало в точку x^* и направив ось x по касательной к $\partial\Omega$ в положительном направлении, а ось y по нормали внутрь Ω . Назовем эту координатную систему естественной в окрестности точки x^* . Пусть уравнение границы в естественной координатной системе в окрестности точки x^* имеет вид $y = y_0(x)$. Элементарной деформацией области Ω в точке x^* будем называть семейство областей Ω_{λ} , $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, отличающихся от Ω тем, что уравнение границы $\partial\Omega$ в окрестности x^* заменяется на $y = y_0(x) + (\lambda_1 + \lambda_2 x) \chi(x)$, где χ - гладкая срезающая функция, равная нулю вне некоторой достаточно малой окрестности точки 0, и равная тождественно 1 в другой окрестности точки 0. Если λ достаточно мало, то Ω_{λ} - выпуклая область. При малых λ области Ω_{λ} близки к Ω в топологии пространства Ω .

Рассмотрим простую n -траекторию $\{z_i, 0 \leq i < n\}$ преобразования T_{Ω} . Пусть $\{z_i(\lambda), 0 \leq i < n\}$ - n -траектория преобразования $T_{\Omega_{\lambda}}$, начинающаяся с той же точки, т.е. $z_0(\lambda) = z_0$. Рассмотрим в окрестности z_i координатную систему $(H(x_i), \varphi)$, где $x_i = x_{\Omega}(z_i)$. Введение координат позволяет обращать-

ся с точками, как с векторами. Обозначим символом I_i множество всех целых $j \in]0, i]$, для которых $z_j = z^*$. Будем считать, что носитель χ содержится в достаточно малой окрестности 0, чтобы деформация не затрагивала точек z_j для $j \in I_i$.

Лемма 28.5. При описанных выше условиях

$$z_i(\lambda) = z_i + \sum_{j \in I_i} dT_{\Omega}^{i-j}(z_j) D(z_j) \lambda + O(\lambda^2). \quad (28.1)$$

Здесь
$$D(z) = \begin{pmatrix} -2 \cos \vartheta & 0 \\ -\frac{2}{\rho} \operatorname{ctg} \vartheta & 2 \end{pmatrix}, \quad (28.2)$$

ρ — радиус кривизны $\partial\Omega$ в точке z^* , ϑ — координата точки z_j в координатной системе (s, ϑ) в Σ_{Ω} .

Доказательство. Изменение точки z_i под действием деформации происходит из-за влияния изменения границы на точки z_j , $j \in I_i$. Результат одного такого влияния в линейном по λ приближении легко вычислить (рис. 19). Пусть $i \in I_i$,

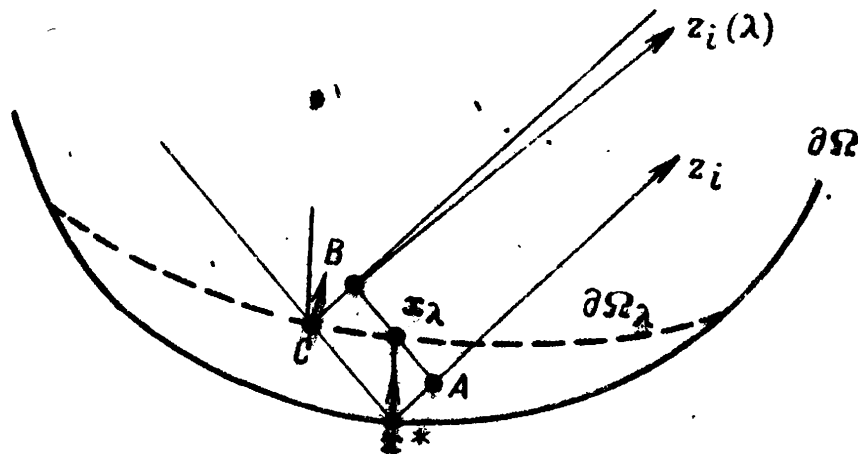


Рис. 19. Вспомогательные построения к доказательству леммы 28.5.

$z_i = z^*$, z_{λ} — точка с координатами $(0, \lambda_1)$. Рассматривая $\Delta z_{\lambda} z^* A$, получим, что $|z_{\lambda} A| = \lambda \cos \vartheta$. По закону отражения

$$|z_{\lambda} B| = |z_{\lambda} A| + O(\lambda^2). \quad (28.3)$$

Поэтому координата $H(x_i)$ точки $z_i(\lambda)$ с точностью до величин порядка λ^2 равна $-2\lambda \cos \vartheta$. Изменение координаты φ в результате деформации равно удвоенному изменению направления нормали к $\partial\Omega_\lambda$ в точке отражения. В точке x_λ нормаль повсрачивается на угол, равный $\arctg \lambda_2$. Сдвиг в точку действительного отражения C дает дополнительное изменение угла наклона нормали $-\rho^{-1} \operatorname{ctg} \vartheta \cdot \lambda_1 + O(\lambda^2)$. В итоге вклад от деформации в точке x^* , соответствующий x_i , равен $D(x_i) \lambda + O(\lambda^2)$. Для того чтобы учесть влияние на z_i действия деформации на другие точки z_j , $j \in I_i$, $j \neq i$, надо написать аналогичные выражения для этих точек и применить T_Ω^{i-j} . Вычисление линейной части дает (28.1). ■

Для вычислений удобно переписать матрицы $dT^{i-j}(z_j)$ в координатной системе (s, ϑ) в пространстве Σ_Ω . Обозначим соответствующие матрицы символами $T_{\alpha_i \alpha_j}$. Здесь $\prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i$ — слово, изображающее рассматриваемую n -траекторию. Если одна и та же пара букв изображает две разные пары точек n -траектории, то, чтобы различить матрицы, соответствующие этим парам, снабдим буквы, входящие второй раз, штрихом, третий раз — двумя штрихами и т.д. Из формулы (1.5) следует, что

$$T_{\alpha_i \alpha_j} = B(z_i) dT^{i-j}(z_j) B^{-1}(z_j), \quad (28.4)$$

где
$$B(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin \vartheta & \\ -\frac{1}{\rho \sin \vartheta} & 1 \end{pmatrix}. \quad (28.5)$$

Введем вектор деформации $v = B(z_{i_0}) D(z_{i_0}) \lambda$, где $i_0 \in I_i$. В этих обозначениях удобно выразить изменение координаты s . Будем отсчитывать координату s от точки $x_\Omega(z_i)$, если $i \in I_i$, и от точки x_λ , если $i \in I_i$. В следующих ниже формулах символ $(b)_i$ обозначает первую компоненту вектора b .

Лемма 28.6. Если $i \notin I_i$, то с точностью до $O(\lambda^2)$

$$s(z_i(\lambda)) \cong \left(\sum_{j \in I_i} T_{\alpha_i \alpha_j} P_{j i_0} v \right)_1. \quad (28.6)$$

Если $i \in I_i$, то с точностью до $O(\lambda^2)$

$$s(z_i(\lambda)) \cong \left(\sum_{j \in I_i \setminus \{i\}} T_{\alpha_i \alpha_j} P_{j i_0} v + \frac{1}{2} P_{i i_0} v \right)_1. \quad (28.7)$$

Здесь

$$P_{ji_0} = B(z_j)D(z_j)[B(z_{i_0})D(z_{i_0})]^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{ctg} \theta(z_j) & 0 \\ \operatorname{ctg} \theta(z_{i_0}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (28.8)$$

Доказательство. Формула (28.6) следует из (28.1). Для получения (28.7) надо учесть, что в силу равенства (28.3) координата $H(x_2)$ точки $x_2(\lambda)$ вдвое меньше координаты $H(x^*)$ этой точки. ▀

Построим деформацию области Ω_0 , применив три элементарные деформации в точках вида $\omega_{\Omega_0}(z_i)$. В табл. 2 в графе "точки деформации" указаны три символа, соответствующие точкам $\omega_{\Omega_0}(z_i) \in \partial\Omega_0$, в которых мы произведем элементарные деформации. Следовательно, совокупная деформация области будет зависеть от шести параметров $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6) = \lambda \in \mathbb{R}^6$. Нам будет интересно поведение точек x_i , отвечающих вхождению в редуцированный фрагмент Ω букв α, β и γ . Возможны три случая: 1) $\alpha_p = \alpha_q = \alpha, p < q, \alpha_r = \alpha_k = \beta, r < k, \alpha_l = \alpha_m = \gamma, l < m$; 2) $\alpha_p = \alpha_q = \alpha_r = \alpha, p < q < r, \alpha_k = \alpha_l = \beta, k < l$; 3) $\alpha_p = \alpha_q = \alpha_r = \alpha_k = \alpha, p < q < r < k$, и случаи, отличающиеся от перечисленных перестановкой букв α, β и γ . Рассмотрим отображение $\lambda \mapsto y(\lambda), y(\lambda) = (y_1(\lambda), y_2(\lambda), y_3(\lambda)) \in \mathbb{R}^3$, где

$$\left. \begin{aligned} y_1(\lambda) &= s(z_q(\lambda)) - s(z_p(\lambda)), \\ y_2(\lambda) &= s(z_r(\lambda)) - s(z_k(\lambda)), \\ y_3(\lambda) &= s(z_l(\lambda)) - s(z_m(\lambda)), \end{aligned} \right\} \text{ в случае 1),}$$

$$\left. \begin{aligned} y_2(\lambda) &= s(z_r(\lambda)) - s(z_p(\lambda)), \\ y_3(\lambda) &= s(z_k(\lambda)) - s(z_l(\lambda)), \end{aligned} \right\} \text{ в случае 2),}$$

$$\left. \begin{aligned} y_2(\lambda) &= s(z_r(\lambda)) - s(z_p(\lambda)), \\ y_3(\lambda) &= s(z_k(\lambda)) - s(z_p(\lambda)). \end{aligned} \right\} \text{ в случае 3).}$$

При малых λ равенство $y(\lambda) = 0$ эквивалентно тому, что слово n -траектории $\{x_i(\lambda), 0 \leq i < n\}$ содержит вхождение Ω .

Лемма 28.7. Ранг отображения $y(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$ равен трем.

Доказательство. Надо выписать 66 матриц $dy(0)$, соответствующим всем р.ф. из табл.2, и убедиться в том, что их ранги равны 3. Ограничимся рассмотрением пяти примеров для слов с номерами 23, 61, 58, 43, 56.

№ 23. $\alpha\delta\beta\epsilon\beta\alpha\mu\beta$. Точки деформации δ, ϵ, μ . Обозначим соответствующие векторы деформации символами $u_\delta, u_\epsilon, u_\mu$. Вычислим $y_i(\lambda)$, $i=1, 2, 3$. Согласно формуле (28.6) с точностью до величин порядка λ^2

$$\begin{aligned} y_1 &\cong (T_{\alpha'\delta} u_\delta + T_{\alpha'\epsilon} u_\epsilon)_1, \\ y_2 &\cong (T_{\beta'\delta} u_\delta + T_{\beta'\epsilon} u_\epsilon - T_{\beta\delta} u_\delta)_1, \end{aligned} \quad (28.9)$$

$$y_3 \cong (T_{\beta''\delta} u_\delta + T_{\beta''\epsilon} u_\epsilon + T_{\beta''\mu} u_\mu - T_{\beta\delta} u_\delta)_1.$$

Введем вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6) \in \mathbb{R}^6$, положив $(\alpha_1, \alpha_2) = T_{\alpha'\delta} u_\delta + T_{\alpha'\epsilon} u_\epsilon$, $(\alpha_3, \alpha_4) = T_{\beta\delta} u_\delta$, $(\alpha_5, \alpha_6) = T_{\beta''\mu} u_\mu$. Матрица линейного преобразования $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6) \mapsto (y_1, y_2, y_3)$, задаваемого формулами (28.9), имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (T_{\beta'\alpha'})_{11} & (T_{\beta'\alpha'})_{12} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ (T_{\beta''\alpha'})_{11} & (T_{\beta''\alpha'})_{12} & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь символом $(T)_{ik}$ обозначен элемент матрицы T , стоящий на пересечении i -й строки и k -го столбца. Вычеркивая столбцы с номерами 2, 4, 6, получаем 3×3 матрицу с определителем, равным -1 .

№ 61. $\alpha\beta\gamma\delta\gamma\alpha\epsilon\beta$. Точки деформации β, δ, ϵ . Согласно формулам (28.6) и (28.7) с точностью до величин порядка $O(\lambda^2)$

$$\begin{aligned} y_1 &\cong (T_{\alpha'\beta} u_\beta + T_{\alpha'\delta} u_\delta)_1, \\ y_2 &\cong (T_{\beta'\beta} u_\beta + T_{\beta'\delta} u_\delta + T_{\beta'\epsilon} u_\epsilon + P u_\beta - u_\beta)_1, \\ y_3 &\cong (T_{\gamma'\beta} u_\beta + T_{\gamma'\delta} u_\delta - T_{\gamma\beta} u_\beta)_1. \end{aligned}$$

Положим $(\alpha_1, \alpha_2) = T_{\gamma'\beta} u_\beta + T_{\gamma'\delta} u_\delta$, $(\alpha_3, \alpha_4) = T_{\beta'\epsilon} u_\epsilon$, $(\alpha_5, \alpha_6) = u_\beta$. Матрица преобразования $\alpha \mapsto y$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} (T_{\alpha'\gamma'})_{11} & (T_{\alpha'\gamma'})_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (T_{\beta'\gamma'})_{11} & (T_{\beta'\gamma'})_{12} & 1 & 0 & \frac{\text{ctg}\delta_{\beta'}}{\text{ctg}\delta_{\beta}} - 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -(T_{\gamma\beta})_{11} & -(T_{\gamma\beta})_{12} \end{pmatrix}.$$

Обозначим символом (i, k, l) определитель матрицы порядка 3×3 , полученной из 3×6 матрицы вычеркиванием столбцов с номерами i, k, l . Для рассматриваемой матрицы

$$\begin{aligned} (4, 5, 6) &= (T_{\alpha'\gamma'})_{12}, & (2, 4, 6) &= -(T_{\alpha'\gamma'})_{11}(T_{\gamma\beta})_{11}, \\ (2, 4, 5) &= -(T_{\alpha'\gamma'})_{11}(T_{\gamma\beta})_{12}. \end{aligned}$$

Если $(T_{\alpha'\gamma'})_{12} = 0$, то $(T_{\alpha'\gamma'})_{11} \neq 0$, так как определитель матрицы $T_{\alpha'\gamma'}$ не равен нулю в силу обратимости преобразования T_{Ω} . Точно так же числа $(T_{\gamma\beta})_{11}$ и $(T_{\gamma\beta})_{12}$ не равны нулю одновременно. Поэтому один из выписанных определителей отличен от нуля.

§ 58. $\alpha\beta\delta\gamma\epsilon\gamma\alpha$. Точки деформации δ, γ, ϵ .
Используя вышеприведенные обозначения, имеем

$$y_1 \cong (T_{\alpha'\delta} v_{\delta} + T_{\alpha'\gamma} v_{\gamma} + T_{\alpha'\epsilon} v_{\epsilon} + T_{\alpha'\gamma'} P v_{\gamma})_1,$$

$$y_2 \cong (T_{\beta'\delta} v_{\delta} + T_{\beta'\gamma} v_{\gamma})_1,$$

$$y_3 \cong (T_{\gamma'\delta} v_{\delta} + T_{\gamma'\gamma} v_{\gamma} + T_{\gamma'\epsilon} v_{\epsilon} - T_{\gamma\delta} v_{\delta} + \frac{1}{2}(P - \text{Id}) v_{\gamma})_1.$$

Матрица преобразования $\alpha \mapsto y$, где

$$(\alpha_1, \alpha_2) = T_{\alpha'\delta} v_{\delta} + T_{\alpha'\gamma} v_{\gamma} + T_{\alpha'\epsilon} v_{\epsilon} + T_{\alpha'\gamma'} P v_{\gamma},$$

$$(\alpha_3, \alpha_4) = T_{\beta'\delta} v_{\delta} + T_{\beta'\gamma} v_{\gamma}, \quad (\alpha_5, \alpha_6) = v_{\delta},$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (T_{\gamma'\alpha'})_{11} & (T_{\gamma'\alpha'})_{12} & -(T_{\gamma\beta})_{11} & -(T_{\gamma\beta})_{12} & -\frac{1}{2} \left(\frac{\text{ctg}\delta_{\gamma'}}{\text{ctg}\delta_{\gamma}} - 1 \right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркивая столбцы с номерами 2, 4, 6, получаем матрицу с определителем, равным $-(1/2)(\text{ctg}\delta_{\gamma'}/\text{ctg}\delta_{\gamma} - 1)$. Здесь δ_{γ} и $\delta_{\gamma'}$ -

значения координат $\vartheta(z_i)$ для точек z^γ и $z^{\gamma'}$ — n -траектории, соответствующих первому и второму вхождению символа γ в рассматриваемый м.р.ф. Так как $z^\gamma \neq z^{\gamma'}$ (в силу свойства $K\Omega_03$) в K нет периодических точек T_{Ω_0} с периодом меньше n , $\pi_{\Omega_0}(z^\gamma) = \pi_{\Omega_0}(z^{\gamma'})$, то $\vartheta_\gamma \neq \vartheta_{\gamma'}$. Поэтому определитель отличен от нуля.

№ 43. $\alpha\beta\delta\gamma\alpha\epsilon\gamma$. Точки деформации δ, γ, ϵ ;

$$y_1 \cong (T_{\alpha'\delta} v_\delta + T_{\alpha'\gamma} v_\gamma)_1, \quad y_2 \cong (T_{\beta'\delta} v_\delta)_1,$$

$$y_3 \cong (T_{\gamma'\delta} v_\delta + T_{\gamma'\gamma} v_\gamma + T_{\gamma'\epsilon} v_\epsilon - T_{\gamma\delta} v_\delta + \frac{1}{2}(P - \text{Id}) v_\gamma)_1,$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) = T_{\alpha'\delta} v_\delta + T_{\alpha'\gamma} v_\gamma, \quad (\alpha_3, \alpha_4) = T_{\gamma'\epsilon} v_\epsilon, \quad (\alpha_5, \alpha_6) = v_\gamma,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (T_{\beta'\alpha'})_{11} & (T_{\beta'\alpha'})_{12} & 0 & 0 & -(T_{\beta'\gamma})_{11} & -(T_{\beta'\gamma})_{12} \\ (T_{\gamma'\alpha'} - T_{\gamma\alpha'})_{11} & (T_{\gamma'\alpha'} - T_{\gamma\alpha'})_{12} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\text{ctg } \vartheta_{\gamma'}}{\text{ctg } \vartheta_\gamma} + 1 \right) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left. \begin{aligned} (2, 4, 5) &= (T_{\beta'\gamma})_{12} \\ (2, 4, 6) &= (T_{\beta'\gamma})_{11} \end{aligned} \right\} \text{ не равны нулю одновременно.}$$

№ 56. $\alpha\beta\delta\gamma\beta\epsilon\alpha\gamma$. Точки деформации δ, γ, ϵ ;

$$y_1 \cong (T_{\alpha'\delta} v_\delta + T_{\alpha'\gamma} v_\gamma + T_{\alpha'\epsilon} v_\epsilon)_1,$$

$$y_2 \cong (T_{\beta'\delta} v_\delta + T_{\beta'\gamma} v_\gamma),$$

$$y_3 \cong (T_{\gamma'\delta} v_\delta + T_{\gamma'\gamma} v_\gamma + T_{\gamma'\epsilon} v_\epsilon - T_{\gamma\delta} v_\delta + \frac{1}{2}(P - \text{Id}) v_\gamma)_1,$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) = T_{\beta'\delta} v_\delta + T_{\beta'\gamma} v_\gamma + T_{\beta'\epsilon} v_\epsilon, \quad (\alpha_3, \alpha_4) = T_{\gamma'\delta} v_\delta + T_{\gamma'\gamma} v_\gamma, \quad (\alpha_5, \alpha_6) = v_\gamma,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (T_{\gamma'\alpha'})_{11} & (T_{\gamma'\alpha'})_{12} & -(T_{\gamma\beta'})_{11} & -(T_{\gamma\beta'})_{12} & \frac{1}{2} \left(\frac{\text{ctg } \vartheta_{\gamma'}}{\text{ctg } \vartheta_\gamma} + 1 \right) & 0 \end{pmatrix},$$

$(2, 4, 6) = (1/2)(\text{ctg } \vartheta_{\gamma'} / \text{ctg } \vartheta_\gamma + 1) \neq 0$, так как равенство нулю означало бы, что $\vartheta_\gamma = \pi - \vartheta_{\gamma'}$, т.е. $\hat{\sigma} z^\gamma = z^{\gamma'}$, что исключено в силу условия $K\Omega 5$.

Мы привели типичные примеры. Все остальные случаи рассматриваются аналогично. ■

Завершим доказательство леммы 28.4. Мы рассматривали n -траекторию $\{T_{\Omega_0}^i z_0, 0 \leq i < n\}$, такую, что слово, ее изображающее, содержит Ω . Распространим построенную выше деформацию $\Omega_{0,\lambda}$ области Ω_0 на близкие к Ω_0 области Ω . Для этого воспользуемся теми же формулами. Если точки приложения элементарных деформаций для деформации $\Omega_{0,\lambda}$ суть $x_{\Omega_0}(T_{\Omega_0}^{i_s} z_0)$, $s=1,2,3$, i_s — минимальные номера с этим свойством, принадлежащие подмножеству из вхождения Ω , то в качестве точек приложения элементарных деформаций для области Ω возьмем точки $x_{\Omega}(T_{\Omega}^{i_s} z)$. Построенную деформацию области Ω будем обозначать символом Ω_{λ} . Теми же формулами определим отображения, аналогичные отображению $y(\lambda)$. Заменяем в этих формулах точку z_0 близкой к ней точкой z . Для полученного отображения примем обозначение $y_{\Omega,z}(\lambda)$.

З а м е ч а н и е 1. Функция $y_{\Omega,z}$ и производные по λ зависят непрерывно от совокупности переменных Ω, z, λ .

З а м е ч а н и е 2. Равенство $y_{\Omega,z}(\lambda) = 0$ эквивалентно тому, что слово, изображающее n -траекторию $\{T_{\Omega_{\lambda}}^i z, 0 \leq i < n\}$, содержит вхождение Ω .

В качестве окрестностей \mathcal{U} и \bar{V} возьмем достаточно малые окрестности точек Ω_0 и z_0 , такие, чтобы ранг отображения $y_{\Omega,z}$ в точке $\lambda=0$ был равен трем для всех $(\Omega, z) \in \mathcal{U} \times \bar{V}$. Покажем, что построенные окрестности \mathcal{U} и \bar{V} обладают требуемыми в лемме свойствами. Пусть $\Omega \in \mathcal{U}'$. Из замечания 2 следует, что $y_{\Omega,z}(0) \neq 0$ для всех $z \in \bar{V} \cap K$. В силу непрерывной зависимости $y_{\Omega,z}$ от Ω (см. замечание 1) это верно и для всех достаточно близких к Ω областей, т.е. множество \mathcal{U}' открыто. Докажем плотность \mathcal{U}' в \mathcal{U} . Пусть $\Omega \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}'$. Рассмотрим деформацию Ω_{λ} , где переменная λ принимает значения из куба Δ в \mathbb{R}^6 с центром в точке 0. Куб Δ возьмем достаточно маленьким, таким, что $\Omega_{\lambda} \in \mathcal{U}$ при $\lambda \in \Delta$.

Пусть $E = \Delta \times \bar{V}$ состоит из всех пар (λ, z) , таких, что n -траектория $\{T_{\Omega_{\lambda}}^i z, 0 \leq i < n\}$ изображается словом, со-

держащим Ω . Пусть куб Δ настолько мал, что ранг отображения $V_{\Omega, \lambda}$ равен трем при всех $\lambda \in \Delta$. Тогда (см. замечание 1) множество E будет подмногообразием коразмерности 3 в 8-мерной области $\Delta \times \bar{V}$, т.е. его размерность равна пяти. Проекция 5-мерного многообразия E на 6-мерный куб Δ имеет 6-мерную меру Лебега нуль. Существуют сколь угодно малые $\lambda \in \Delta$, не принадлежащие этой проекции. Область Ω_λ с такими λ очевидно принадлежит Ω' .

§ 29. Доказательство леммы 27.4.
Приведение периодической траектории в общее положение

Несимметричную периодическую траекторию с периодом n преобразования T назовем трансверсальной, если единица не является собственным числом матрицы dT^n в точках этой траектории. Симметричную периодическую траекторию с периодом $2n$ преобразования T назовем трансверсальной, если кривые Γ_0 и $T^n \Gamma_0$ пересекаются трансверсально в концевых точках этой траектории. Периодическую точку назовем трансверсальной, если она принадлежит трансверсальной периодической траектории. Трансверсальные периодические точки изолированы и устойчивы.

Пусть Ω' и Ω'' — подмножества множества $\Omega_n^{(3)}(K)$, состоящие из всех областей Ω , обладающих соответственно свойствами:

для Ω' : все несимметричные периодические точки преобразования T_n с периодом n трансверсальны,

для Ω'' : все симметричные периодические точки преобразования с периодом $2n$ трансверсальны.

Достаточно доказать следующие три леммы.

| Лемма 29.1. Множество Ω' открыто и плотно в $\Omega_n^{(3)}(K)$.

| Лемма 29.2. Множество Ω'' открыто и плотно в $\Omega_n^{(3)}(K)$.

| Лемма 29.3. Множество $\tilde{\Omega}_n(K)$ открыто и плотно в $\Omega' \cap \Omega''$.

Сформулируем локальные варианты лемм 29.1 и 29.2.

Лемма 29.4. Для любой пары $(\Omega_0, z_0) \in \mathbb{Q}_n^{(3)}(K) \times K$ существуют открытая окрестность \mathcal{U} области Ω_0 в $\mathbb{Q}_n^{(3)}(K)$ и компактная окрестность \bar{V} точки z_0 в Π , такие, что множество \mathcal{U}' , состоящее из всех областей $\Omega \in \mathcal{U}$, обладающих свойством: "все несимметричные периодические точки T_Ω с периодом n , принадлежащие $\bar{V} \cap K$, трансверсальны", открыто и плотно в \mathcal{U} .

Лемма 29.5. Формулировка получается из формулировки леммы 29.4 заменой слов "несимметричные периодические точки T_Ω с периодом n " на слова "симметричные периодические точки T_Ω с периодом $2n$ ".

Леммы 29.1 и 29.2 выводятся из лемм 29.4 и 29.5 точно так же, как лемма 28.3 выводилась из леммы 28.4. При этом надо учесть, что все периодические точки с периодом n , принадлежащие несимметричным периодическим траекториям, лежат в K , и концевые точки симметричных периодических траекторий с периодом $2n$ также лежат в K . Тип периодической точки один и тот же для всех точек траектории.

Доказательство леммы 29.4. Если z_0 не является несимметричной периодической точкой T_{Ω_0} с периодом n , то это верно для пар (Ω, z) , близких к (Ω_0, z_0) . В качестве \mathcal{U} и \bar{V} можно взять достаточно малые окрестности точек Ω_0 и z_0 . В этом случае $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$.

В дальнейшем понадобится понятие свободной точки. Пусть $\{z_i, 0 \leq i < n\}$ — n -траектория преобразования T_Ω . Точку z_i назовем свободной точкой n -траектории, если $z_i \neq z_j$ для всех $j \neq i$. Соответствующую точку $\omega_\Omega(z_i)$ назовем свободной точкой границы (относительно данной n -траектории).

Лемма 29.6. Любая 3-невирожденная простая n -траектория имеет свободную точку. Если $n > 1$, то таких точек по крайней мере две.

Доказательство. Рассматривая табл. I, убеждаемся, что утверждение леммы справедливо для $m \leq 4$. Если $m \geq 5$, то $n = m + k \geq 5 + k$. Если $k = 0$, то все точки n -траектории свободны. Если $k = 1$, то число свободных точек равно $n - 2 \geq 4$.

Действительно, разбиение множества из n элементов на $n-1$ непустых подмножеств обязательно содержит $n-2$ одноэлементных подмножеств. Точно так же, если $k=2$, то число свободных точек не меньше, чем $n-4 \geq 5+2-4=3$. ■

Пусть z_0 является несимметричной периодической точкой T_{Ω_0} с периодом n . В качестве \mathcal{U} и \bar{V} возьмем достаточно малые окрестности точек Ω_0 и z_0 , такие, что для некоторого μ , $0 \leq \mu < n$, точка $T_{\Omega_0}^\mu z$ является свободной точкой n -траектории $\{T_{\Omega_0}^i z, 0 \leq i < n-1\}$ сразу для всех пар $(\Omega, z) \in \mathcal{U} \times \bar{V}$. Произведем элементарную деформацию $\Omega_{0,\lambda}$ области Ω_0 в свободной точке границы $\alpha_{\Omega_0}(z_\mu)$. Применим к точке $T_{\Omega_{0,\lambda}}^n z_0$ лемму 28.5. Множество I_n в данном случае состоит из одного числа μ . Из формулы (28.1) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} T_{\Omega_{0,\lambda}}^n z_0 \Big|_{\lambda=0} = dT_{\Omega_0}^{n-\mu}(z_\mu) D(z_\mu). \quad (29.1)$$

В равенстве (29.1) справа стоит невырожденная матрица (см. формулу (28.2)). Распространим эту деформацию на области Ω , близкие к Ω_0 , взяв в качестве точки деформации $\alpha_\Omega(z_\mu)$. Обозначим построенную деформацию области Ω символом Ω_λ . Окрестности \mathcal{U} и \bar{V} точек Ω_0 и z_0 выберем настолько малыми, чтобы матрица $\frac{\partial}{\partial \lambda} T_{\Omega_\lambda}^n z \Big|_{\lambda=0}$ была невырожденной для всех $(\Omega, z) \in \mathcal{U} \times \bar{V}$. Соответствующее множество \mathcal{U}' очевидно является открытым в силу компактности множества $\bar{V} \times K$ и устойчивости трансверсальных траекторий. Докажем*) , что \mathcal{U}' плотно в \mathcal{U} . Пусть $\Omega \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}'$. Рассмотрим деформацию Ω_λ области Ω , где λ принимает значения из замкнутого квадрата Δ в \mathbb{R}^2 с центром в нуле, достаточно малого, такого, чтобы деформированная область не выходила за пределы \mathcal{U} . Определим множество $E \subset \Delta \times \bar{V}$ как множество решений уравнения

$$T_{\Omega_\lambda}^n z = z. \quad (29.2)$$

*) Применяемая ниже схема заимствована из работы Р. Тома и Г. Левина, русский перевод которой опубликован в сборнике "Соблюдение дифференцируемых отображений". М., 1968.

В силу невырожденности производной по λ от левой части уравнения (29.2) его можно локально разрешать относительно λ , пользуясь теоремой о неявной функции. Пусть $(\lambda, z) \in E$. Существуют окрестности $a(\lambda)$ и $b(z)$ точек λ и z , такие, что $E \cap a(\lambda) \times b(z)$ есть график гладкой функции $\psi_{\lambda z}: b(z) \rightarrow a(\lambda)$. Обозначим символом $\Sigma_{\lambda z}$ множество критических значений функции $\psi_{\lambda z}$. По теореме Сарда мера Лебега (в \mathbb{R}^2) этого множества равна нулю.

Принадлежность пары (λ, z) множеству E означает, что z является периодической точкой T_{Ω_λ} с периодом n . Будем считать, что окрестности \mathcal{U} и \bar{V} настолько малы, что где такие периодические точки несимметричны.

Лемма 29.7. Периодическая точка z' с периодом n преобразования $T_{\Omega_{\lambda'}}$, где $(\lambda', z') \in a(\lambda) \times b(z)$, нетрансверсальна тогда и только тогда, когда она является критической точкой функции $\psi_{\lambda z}$.

Доказательство. Утверждение леммы станет очевидным, если продифференцировать тождество $T_{\Omega_{\psi(z')}}^n z' = z'$. ■

Из леммы 29.7 следует, что все периодические точки с периодом n преобразования $T_{\Omega_{\lambda'}}$, принадлежащие окрестности в $b(z)$, трансверсальны, если $\lambda' \notin \Sigma_{\lambda z}$. Покроем E конечным числом таких окрестностей $a(\lambda) \times b(z)$. Если λ' не принадлежит объединению соответствующих множеств $\Sigma_{\lambda z}$, то все периодические точки $T_{\Omega_{\lambda'}}$ с периодом n , лежащие в $\bar{V} \cap K$, трансверсальны. ■

Доказательство леммы 29.5. Если z_0 не является симметричной периодической точкой T_{Ω_0} с периодом $2n$, то в качестве \mathcal{U} и \bar{V} можно взять достаточно малые окрестности Ω_0 и z_0 , причем в этом случае $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$. Пусть z_0 — симметричная периодическая точка преобразования T_{Ω_0} с периодом $2n$.

Рассмотрим случай $n=1$. Произведем элементарные деформации области Ω_0 в точках $\alpha_{\Omega_0}(z_0)$ и $\alpha_{\Omega_0}(T_{\Omega_0} z_0)$ с параметрами $(0, \lambda_1)$ и $(0, \lambda_2)$ соответственно. Деформированную область обозначим символом Ω_λ , где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$. Используя лемму 29.5 ■

формулу (2.5), получаем

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} T_{\Omega_{0\lambda}}^2(z_0) \Big|_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 0 & 2l \\ 2 & -2 + \frac{4l}{\rho \sin \vartheta} \end{pmatrix}.$$

Видно, что эта матрица не вырождена. Дальнейшие рассуждения проводятся точно так же, как при доказательстве леммы 29.4.

Рассмотрим случай $n > 1$. Точка $z_0 \in K$ обязательно будет концевой точкой симметричной периодической траектории с периодом $2n$. Рассмотрим n -траекторию $\{T_{\Omega_0}^i z_0, 0 \leq i < n\}$. Она будет простой и 3-невырожденной. Из леммы 29.6 следует, что некоторая точка $z_\mu = T_{\Omega_0}^\mu z_0$ этой n -траектории будет свободной, и можно считать, что $\mu > 0$. Произведем элементарную деформацию области Ω_0 в точке $z_\mu = z_{\Omega_0}(z_\mu)$. Дальнейшие рассуждения проводятся по тому же плану, что и при доказательстве леммы 29.4. Вместо уравнения (29.2) рассмотрим уравнение

$$T_{\Omega_\lambda}^n(z'_0) = z'_n, \quad (29.3)$$

где $(z'_0, z'_n) \in \Gamma_0 \times \Gamma_0$. Уравнение (29.3) рассмотрим для пар (z'_0, z'_n) близких к $(z_0, T_{\Omega_0}^n z_0)$. По-прежнему $\frac{\partial}{\partial \lambda} T_{\Omega_\lambda}^n(z)$ — невырожденная матрица. Применяя к (29.3) теорему о неявной функции, получаем (локально) функцию ψ , сопоставляющую паре $(z'_0, z'_n) \in \Gamma_0 \times \Gamma_0$ ту точку λ , для которой данная пара образует концевые точки симметричной периодической траектории преобразования T_{Ω_λ} . Роль леммы 29.7 здесь играет следующая лемма, доказательством которой и завершим доказательство леммы 29.5.

Лемма 29.8. Периодическая симметричная траектория $\{z'_0, \dots, z'_{2n-1}\}$ с периодом $2n$ преобразования $T_{\Omega_\psi(z'_0, z'_n)}$ нетрансверсальна тогда и только тогда, когда пара ее концевых точек является критической точкой функции ψ .

Доказательство. Удобно вести рассмотрение в координатах (s, ϑ) для области Ω . Уравнение Γ_0 в этих координатах есть $\vartheta = \pi/2$. отождествим переменные z'_0 и z'_n с соответствующими значениями координаты s . Подставляя в (29.3) функцию $\psi(z'_0, z'_n)$ вместо λ и дифференцируя получившееся тождество, имеем

$$dT_{\Omega_\lambda}^n(z'_0)e + B \frac{\partial \psi}{\partial z'_0} = 0, \quad (29.4)$$

$$B \frac{\partial \psi}{\partial z'_n} = e.$$

Здесь e — единичный вектор, касательный к Γ_0 , буквой B обозначена матрица $\frac{\partial}{\partial \lambda} T_{\Omega_\lambda}^n(z'_0)$. Так как эта матрица не вырождена, то вырожденность матрицы $(\partial \psi / \partial z'_0, \partial \psi / \partial z'_n)$ эквивалентна линейной зависимости векторов e и $dT_{\Omega_\lambda}^n(z'_0)e$. ■

Доказательство леммы 29.3. Так как все периодические точки с периодом, не превосходящим n , преобразования T_Ω , $\Omega \in \Omega' \cap \Omega''$, трансверсальны, то они изолированы, их конечное число. Открытость множества $\Omega_n(K)$ очевидна, а плотность можно доказать деформируя область Ω отдельно для каждой периодической точки. Поскольку их конечное число и они устойчивы, деформация произведенная с целью улучшить одну периодическую траекторию, не испортит никаких существенных для нас свойств остальных рассматриваемых периодических траекторий, если эта деформация достаточно мала.

Пусть $\{z_i, 0 \leq i < n\}$ — периодическая траектория T_Ω с периодом n , $Tz_i = z_{i+1 \pmod n}$. Если траектория несимметрична, то у нее, как было показано, всегда есть свободная точка z_μ . Если траектория симметричная, то такой свободной точкой z_μ обладает половина траектории $\{z_i, 0 \leq i < n/2\}$, где z_0 — концевая точка. Произведем деформацию области Ω в точке $x^* = \alpha_\Omega(z_\mu)$, заменив уравнение $y = y_0(x)$ границы области Ω в естественной координатной системе в окрестности x^* на уравнение $y = y_0(x) + tx^2 \chi(x)$; где t — малый параметр, χ — срезающая функция. Обозначим деформированную область символом Ω_t , матрицу $dT_{\Omega_t}^n(z_\mu)$ запишем в виде $\begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$. Далее для упрощения записи индекс Ω_t в символе T_{Ω_t} будем опускать.

Лемма 29.9. Область Ω можно сколь угодно мало деформировать так, чтобы функции $a(t) + d(t)$ и $b(t)$ стали непостоянными полиномами.

Доказательство. Так как $dT^n(z_\mu) = dT^{n-1}(z_{\mu+1}) \times dT(z_\mu)$, то в силу (2.5)

$$b(t) = a_1 l + b_1 \left(-1 + \frac{2l}{\rho \sin \theta} \right) + t b_1 \frac{4l}{\sin \theta}, \quad (29.5)$$

$$a(t) + d(t) = -a_1 - d_1 + \frac{2}{\sin \theta} \left(\frac{1}{\rho} + 2t \right) (-b_1 + l d_1). \quad (29.6)$$

Здесь $dT^{n-1}(z_{\mu+1}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, числа l, θ и ρ соответствуют матрице $dT(z_\mu)$ (см. (2.5)). Если траектория несимметрична, то коэффициенты при t в (29.5) и (29.6) не зависят от t . В случае симметричной траектории они могут зависеть от t , но только линейным образом. В этом случае утверждение леммы справедливо. Если $n = 2$, то $b_1 = l \neq 0$, $-b_1 + l d_1 = -2l + 2l^2/\rho_1$, где ρ_1 — радиус кривизны границы в точке $\alpha_\Omega(z_{\mu+1})$. Если оказалось, что $-b_1 + l d_1 = 0$, то вследствие малой деформации границы в точке $\alpha_\Omega(z_{\mu+1})$ это обстоятельство можно иметь.

Пусть $n > 2$. Положим $dT^{n-2}(z_{\mu+2}) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$. Используя (2.5), имеем

$$b_1 = a_2 l_1 + b_2 \left(-1 + \frac{2l_1}{\rho_1 \sin \theta_1} \right), \quad (29.7)$$

$$-b_1 + l d_1 = -a_2 l_1 + b_2 + l c_1 l_1 - l d_2 + \frac{2l_1}{\rho_1 \sin \theta_1} (-b_2 + l d_2). \quad (29.8)$$

Если $b_1 = 0$, то $b_2 \neq 0$, так как в противном случае в силу (29.7) было бы $a_2 = 0$, что противоречит невырожденности $dT^{n-2}(z_{\mu+2})$. Изменяя ρ_1 деформацией в точке $\alpha_\Omega(z_{\mu+1})$, можно добиться выполнения неравенства $b_1 \neq 0$. Если $-b_1 + l d_1 = 0$ и $-b_2 + l d_2 \neq 0$, то таким же образом за счет изменения ρ_1 , деформируя границу в точке $\alpha_\Omega(z_{\mu+1})$, добьемся выполнения неравенства $-b_1 + l d_1 \neq 0$. Если одновременно $-l_1 + l d_1 = 0$ и $-l_2 + l d_2 = 0$, то из (29.8) вытекает равенство $a_2 = l c_2$, откуда следует вырожденность матрицы $dT^{n-2}(z_{\mu+2})$, что абсурдно.

Аналогично рассматривается случай симметричной периодической точки с периодом $2n$. ■

Из леммы 29.9 следует, что, деформируя сколь угодно мало область Ω , можно изменять собственные числа матрицы $dT^{n(2n)}$

для периодической траектории с периодом $n(2n)$ с тем, чтобы они удовлетворяли условиям $\Omega(n+1)1) - \Omega(n+1)3)$.

Займемся параметром ρ . Если оказалось, что число ρ для эллиптической траектории равно нулю, то, выбрав свободную точку z_μ , продеформируем границу следующим образом (обозначения те же, что и для предыдущих деформаций):

$$y(x) = y_0(x) + tx^4 \chi(x). \quad (29.9)$$

Можно доказать (см. [26]) формулу для коэффициента $\rho(t)$ для деформированной области Ω_t :

$$\rho(t) = -t \frac{12}{b \sin \alpha \sin^3 \delta} \left[(b + \alpha l)^2 - 2l(b + \alpha l) \cos \alpha + l^2 \right]^2. \quad (29.10)$$

Обозначения в (29.10) совпадают с использованными выше, $e^{i\alpha}$ — собственное число матрицы $dT^n(z_\mu) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Заметим, что коэффициент b отличен от нуля, ибо собственный вектор матрицы $dT^n(z_\mu)$, отвечающий собственному значению $e^{i\alpha}$, есть $(b, e^{i\alpha} - a)$. Если бы число b равнялось нулю, то эта матрица имела бы вещественный собственный вектор $(0, 1)$, что противоречит эллиптичности z_μ .

Периодическая траектория с периодом n в нашей ситуации может и не иметь свободной точки. Это бывает лишь тогда, когда траектория симметрична, и для концевых точек z_0 и $z_{n/2}$ имеются точки траектории z_μ и z_ν , для которых $\alpha_\Omega(z_0) = \alpha_\Omega(z_\mu)$, $\mu \neq 0$, и $\alpha_\Omega(z_{n/2}) = \alpha_\Omega(z_\nu)$, $n/2 \neq \nu$. Все остальные точки $n/2$ -траектории $\{z_i, 0 \leq i < n/2\}$ в этом случае свободны. Свободной точкой является во всяком случае одна из двух точек: $z_{\mu-1}$ и $z_{\mu+1}$. Пусть это $z_{\mu+1}$. Продеформируем Ω в окрестности $\alpha_\Omega(z_0) = \alpha_\Omega(z_\mu)$ и $\alpha_\Omega(z_{\mu+1})$ так, чтобы траектория изменилась лишь в точке z_μ , а точка z_0 стала свободной. (На рис. 20 показано, как это можно сделать.) Затем можем производить деформацию (29.9) в точке z^* (см. рис. 20). ■

§ 30. Доказательство леммы 27.5. Трансверсальность гомоклинических и гетероклинических точек

Пусть $\tilde{\Omega}'$ – множество всех областей Ω из $\tilde{\Omega}_n(K)$, обладающих свойством: "собственные векторы матрицы $dT_\Omega^n(z_i)$, где $\{z_i\}$ – любая гиперболическая периодическая траектория преобразования T_Ω с периодом n , не вырождены относительно проецирования π_Ω ". Это свойство эквивалентно отличию

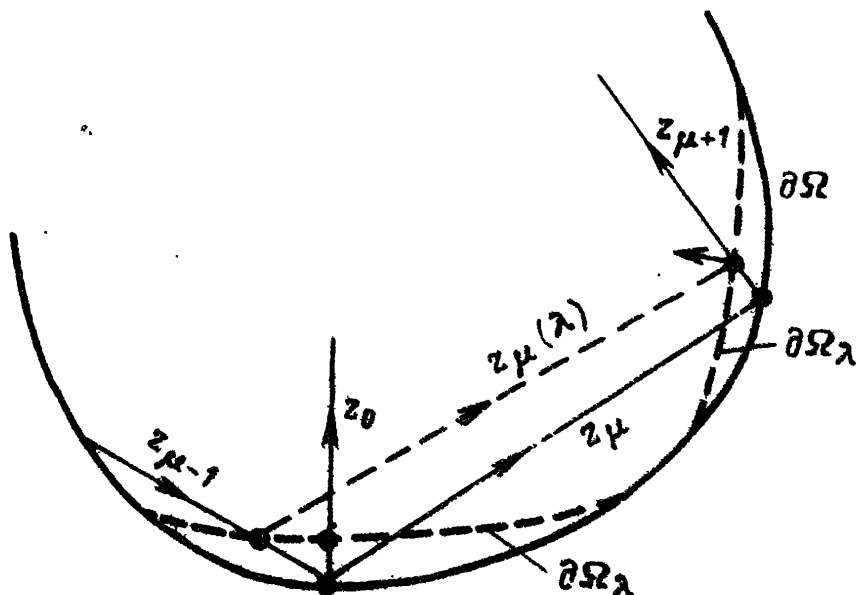


Рис. 20. Деформация, освобождающая конечную точку симметричной периодической траектории.

от нуля коэффициента $(dT_\Omega^n(z_i))_{12}$ матрицы $dT_\Omega^n(z_i)$, вычисленной в координатах $(H(x_\Omega(z_i), \varphi))$. Из леммы (29.9) следует, что $\tilde{\Omega}'$ открыто и плотно в $\tilde{\Omega}_n(K)$. Открытость множества $\tilde{\Omega}_n(K)$ следует из теоремы о непрерывной зависимости $W_{loc}^{(s,u)}(z_0)$ от преобразования T (см. [33]). Достаточно доказать, что $\tilde{\Omega}_n(K)$ плотно в $\tilde{\Omega}'$.

Пусть $\Omega_0 \in \tilde{\Omega}'$, z_0 и z_1 – гиперболические точки T_{Ω_0} с периодами, не превосходящими n . Надо доказать, что область Ω_0 можно сколь угодно мало деформировать, так, чтобы $W_n^{(s)}(z_0)$

и $W_n^{(u)}(z_1)$ пересекались трансверсально. Можно считать, что z_0 — свободная точка своей периодической траектории, поскольку трансверсальность пересечений $W_n^{(s)}(z_0)$ и $W_n^{(u)}(z_1)$ эквивалентна этому свойству для $W_a^{(s)}(T^k z_0)$ и $W_b^{(u)}(T^k z_1)$ с подходящими числами a и b . Для симметричной траектории, возможно, потребуется произвести предварительную деформацию с целью сделать одну из концевых ее точек свободной, так, как это было сделано в конце предыдущего параграфа. Применяя подходящую степень преобразования T^m , где m — наименьшее общее кратное периодов z_0 и z_1 , можно свести все к доказательству трансверсальности пересечений $W_\varepsilon^{(s)}(z_0)$ и $W_N^{(u)}(z_1)$, где ε — сколь угодно малое число. Возьмем ε настолько малым, чтобы отрезок $W_\varepsilon^{(s)}(z_0)$ неособым образом проецировался на $\partial\Omega_0$ при проецировании π_{Ω_0} . Пусть этот отрезок есть график отображения $\psi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^1$, где Δ — достаточно малый интервал, в координатах (s, δ) .

Достаточно доказать локальный вариант требуемого утверждения: для любой точки $s_0 \in \Delta$ существуют достаточно малые окрестности — компактная окрестность \bar{V} точки s_0 и открытая окрестность \mathcal{U} точки Ω_0 , — обладающие свойством: подмножество \mathcal{U}' множества \mathcal{U} , состоящее из всех областей, для которых все точки пересечения $W_\varepsilon^{(s)}(z_0)$ и $W_N^{(u)}(z_1)$, проецирующиеся на \bar{V} , трансверсальны, открыто и плотно в \mathcal{U} . (В силу непрерывной зависимости рассматриваемых объектов от Ω их можно естественным образом отождествить для разных, но близких Ω .) Глобальное утверждение выводится отсюда стандартным образом. Если в точке $(s_0, \psi_0(s_0))$ отрезки $W_\varepsilon^{(s)}(z_0)$ и $W_N^{(u)}(z_1)$ пересекаются трансверсально (что включает в себя и случай, когда пересечение отсутствует), то это верно и для (Ω, s) , близких к (Ω_0, s_0) . Существование требуемых окрестностей в этом случае очевидно. Пусть $W_\varepsilon^{(s)}(z_0)$ и $W_N^{(u)}(z_1)$ пересекаются в точке $(s_0, \psi_0(s_0))$ нетрансверсально. Тогда существуют окрестность \bar{V} точки s и функция $\psi_1: \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^1$, такие, что график ψ_1 есть часть отрезка $W_N^{(u)}(z_1)$, содержащая все точки пересечения $W_N^{(u)}(z_1)$ с графиком сужения ψ_0 на \bar{V} .

Совершим элементарную деформацию области Ω_0 в точке границы с координатой s_0 и вектором $\lambda = (0, t)$. Деформированную область обозначим символом $\Omega_{0,t}$. Если \bar{V} достаточно ма-

ла, то ψ_0 не изменится, а ψ_1 будет зависеть от t . Введем в обозначения зависимость от t . Рассмотрим уравнение

$$\psi_1(s, t) = \psi_0(s). \quad (30.1)$$

Из формул (28.1), (28.2) следует, что $\partial \psi_1 / \partial t |_{t=0} = 2$. Применяя к (30.1) теорему о неявной функции, получаем функцию $t(s)$ критические точки которой суть координаты точек нетрансверсального пересечения рассматриваемых отрезков для деформированной области $\Omega_{0,t}$. Используя описанную в предыдущем параграфе схему с теоремой Сарда, получаем требуемое утверждение о плотности \mathcal{U}' в \mathcal{U} .

В заключение хочу выразить благодарность многим людям, помогавшим мне в работе над книгой. Я благодарен В.М.Бабичу, В.С.Булдыреву, Я.Г.Синаю, В.И.Арнольду, В.М.Алексееву, А.И.Шнирельману, А.Б.Катку, А.Г.Кушниренко, М.М.Попову, Ю.А.Кравцову и многим другим, чьи советы и обсуждения способствовали продвижению в этой работе.

У к а з а т е л ь л и т е р а т у р ы

1. А л е к с е е в В.М. Квазислучайные динамические системы. I. Квазислучайные диффеоморфизмы. - Мат.сб. Новая сер., 1968, т.76 (118), № I, с.72-134.

2. А л е к с е е в В.М. Перроновские множества и топологические цепи Маркова, - Успехи мат.наук, 1969, т.24, вып.5 (149), с.227-229.

3. А р н о л ь д В.И. Доказательство теоремы А.Н.Колмогорова о сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. - Успехи мат.наук, 1963, т.18, вып.5, с.13-39.

4. А р н о л ь д В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. - Успехи мат.наук, 1963, т.18, вып.6, с.91-192.

5. А р н о л ь д В.И. О характеристическом классе, входящем в условиях квантования. - Функциональный анализ и его приложения, 1967, т.1, № 1, с.1-14.

6. А р н о л ь д В.И. Моды и квазимоды. - Функциональный анализ и его приложения, 1972, т.6, № 2, с.12-20.

7. Б а б и ч В.М., Бу л д и р е в В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., 1972, 456 с.

8. Б и р к г о ф Дж.Д. Динамические системы. М.; Л., 1941, 320 с.

9. В а й н ш т е й н Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М., 1966, 475 с.

10. Д в о р и н М.М., Л а з у т к и н В.Ф. Существование бесконечного числа эллиптических и гиперболических траекторий для выпуклого бильярда. - Функциональный анализ и его приложения, т.7, вып.2, 1973, с.20-27.

11. К о л м о г о р о в А.Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. - Докл. АН СССР, 1954, т.98, № 4, с.527-530.

12. Л а д н ж е н о в а О.А., У р а л ь ц е в а Н.Н. Линейные и квазILINEЙНЫЕ уравнения эллиптического типа. М., 1964, 538 с.

13. Л а з у т к и н В.Ф. Собственные функции с заданной каустикой. - Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1970, т.10, № 2, с.352-373.

14. Л а з у т к и н В.Ф. Асимптотика серии собственных функций оператора Лапласа, отвечающей замкнутой инвариантной кривой "бильярдной задачи". - В кн.: Проблемы мат. физики. Вып.5. Л., 1971, с.72-91.

15. Л а з у т к и н В.Ф. Коротковолновая асимптотика собственных частот мембраны. Серия собственных частот, построенная по гладкой замкнутой инвариантной кривой бильярдной задачи. - В кн.: Труды V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. Л., 1971, с.134-143.

16. Л а з у т к и н В.Ф. Построение асимптотики серии собственных функций оператора Лапласа, отвечающей эллиптической периодической траектории "бильярдной задачи". - В кн.: Проблемы мат. физики. Вып.6. Л., 1973, с.90-100.

17. Л а з у т к и н В.Ф. Об асимптотике собственных функций оператора Лапласа. - Докл. АН СССР, 1971, т.200, № 6, с.1277-1279.

18. Л а з у т к и н В.Ф. Существование континуума замкнутых инвариантных кривых для выпуклого бильярда. - Успехи мат. наук, 1972, т.27, вып.3 (165), с.201-202.

19. Л а з у т к и н В.Ф. Существование каустик для бильярдной задачи в выпуклой области. - Изв.АН СССР, 1973, т.37, № 1, с.188-223.

20. Л а з у т к и н В.Ф. Асимптотика собственных функций оператора Лапласа и квазимоды. Серия квазимод, отвечающая системе каустик, близких к границе области. - Изв.АН СССР, 1973, т.37, № 2, с.437-465.

21. Л а з у т к и н В.Ф. Асимптотика собственных функций оператора Лапласа на торе. - В кн.: Вопр.динамической теории распространения сейсмических волн. Вып.14. Л., 1974, с.94-108.

22. Л а з у т к и н В.Ф. К теореме Мозера об инвариантных кривых. - В кн.: Вопр.динамической теории распространения сейсмических волн. Вып.14. Л., 1974, с.109-120.

23. Л а з у т к и н В.Ф. Асимптотика серии собственных функций оператора Лапласа, отвечающей семейству инвариантных кривых. I. - В кн.: Проблемы мат.физики. Вып.7, Л., 1974, с.39-65.

24. Л а з у т к и н В.Ф., Я н у ш а н е ц Ю.Б. Асимптотика серии собственных функций оператора Лапласа, отвечающей семейству инвариантных кривых. II. - В кн.: Проблемы мат.физики. Вып. 7. Л., 1974, с.65-79.

25. Л а з у т к и н А.Ф., Я н у ш а н е ц Ю.Б. Асимптотика серии собственных функций оператора Лапласа, отвечающей семейству инвариантных кривых. III. - В кн.: Проблемы мат.физики. Вып.8. Л., 1976, с.92-109.

26. Л а з у т к и н В.Ф. Теория Колмогорова - Арнольда - Мозера и собственные функции оператора Лапласа. Автореф. докт. дис., Л., 1977. 23 с.

27. Л а з у т к и н В.Ф. Оценка ширины лагун в спектре оператора Лапласа. - Докл. АН СССР, 1979, т.245, № 1, с.20-23.

28. Д а в у т к и н В.Ф. Об оценке $N^*(\lambda)$ для серии квазимод оператора Лапласа. - В кн.: Теория рассеяния. Теория колебаний. Л., 1979, с.64-75. - (Проблемы мат.физики; Вып.9).
29. М а с л о в В.П. Метод ВКБ в многомерном случае. Дополнение к книге Дж.Хединга "Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ)". М., 1965, с.177-237.
30. М а с л о в В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М., 1965. 485 с.
31. М о г и л е в с к и й Д.Ш. Об аналитическом характере функции Грина смешанной задачи для гиперболического уравнения. - Докл. АН СССР, 1971, т.199, № 3, с.540-543.
32. М о з е р Ю. Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения. - Успехи мат.наук, 1968, т.23, вып.4, с.179-238.
33. Н и т е ц к и З. Введение в дифференциальную динамику. М., 1975. 304 с.
34. П у а н к а р е А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М., Л., 1947. 392 с.
35. П у а н к а р е А. Новые методы небесной механики: Избранные труды. Т.2. М., 1972, с.339-340.
36. Р и о р д а н Дж. Введение в комбинаторный анализ. М., 1963. 287 с.
37. Ф е д о р ю к М.В. Метод стационарной фазы для многомерных интегралов. - Журн.вычисл.математики и мат. физики 1962, т.2, № 1, с.145-150.
38. Э й н ш т е й н А. К квантовому условию Зоммерфельда и Эпштейна. - В кн.: Собрание научных трудов. Т. III, М., 1966, с.407-416.
39. B i r k h o f f G.D. Surface transformations and their dynamical applications. - Acta Math., 1920, vol.43, p.1-119.
40. D e n j o u A. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. - J. Math. Pure Appl., 1932, sér.9, t.XI, fasc.IX, p.333-375.
41. H a l p e r n B. Strange billiard tables. - Trans. Amer. Math. Soc., 1977, vol.232, p:297-305.

42. J a r n i k V. Über Gitterpunkte in der Ebene. -
Rozpravy, 1924, Bd 33, S.36.

43. K e l l e r J.B., R u b i n o w S. Asymptotic solu-
tion of eigenvalue problems. - Annal. Phys., 1960, vol.9, N 1,
p.27-75.

44. M o s e r J. On invariant curves of area-preserving
mappings of an annulus. - Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math.
Phys. Kl. IIA, 1962, S.1-20.

45. R ü s s m a n n H. Kleine Nenner I. Über invarianten
Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisrings. - Nachr.
Akad. Wiss. Gottingen, Math. Phys. Kl. II, 1970, S.67-105.

46. C o l i n d e V e r d i e r e Y. Quasi-Modes sur les
varietes Riemanniennes. - Invent. Math., 1977, vol.43, fasc. 1,
p.15-52.

47. W e y l H. Über die Abhängigkeit der Eigenschwingun-
gen einer Membran von deren Begrenzung. - J. Reine Angew. Math.,
1912, Bd 141, S.1-11.

48. W e y l H. Das asymptotische Verteilungsgesetz der
Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen. -
Math. Ann., 1912, vol.71, p.441-479.

49. Z e h n d e r E. An implicit function theorem for
small divisor problems. - Bull. Amer. Math. Soc., 1974, vol.
80, p.174-179.

50. Z e h n d e r E. Generalized implicit function theo-
rems with applications to some small divisor problems. I. -
Comm. Pure Appl. Math., 1975, vol.28, N 1, p.91- 40.

51. Z e h n d e r E. Generalized implicit function theo-
rems with applications to some small divisor problems. II. -
Comm. Pure Appl. Math., 1976, vol.29, N 1, p.49-111.

1 р. 40 к.

